



**Université
Gustave Eiffel**

Dynamique des solides

Cinématique du solide

Fabrice DETREZ

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

1.1 La place de la mécanique dans l'histoire des sciences depuis Newton

La publication des *Principia Mathematica* par Isaac Newton en 1687 marque une rupture décisive dans l'histoire des sciences. En formulant les lois du mouvement et la loi universelle de la gravitation, Newton a jeté les bases de la **mécanique classique**, qui deviendra le modèle de scientificité pour les siècles suivants. La nature apparaît dès lors comme un système régi par des lois mathématiques universelles, prédictibles et vérifiables.

1.1.1 XVIII^e siècle : diffusion et approfondissement

La mécanique newtonienne se diffuse rapidement en Europe et sert de fondement à de nombreux développements scientifiques. Les travaux de Lagrange (*Mécanique analytique*, 1788) et d'Euler permettent une formalisation plus abstraite et générale de la mécanique, fondée sur des principes variationnels. Cette période est marquée par une **universalisation des méthodes mécaniques**, appliquées aussi bien à l'astronomie qu'à l'ingénierie naissante.

1.1.2 XIX^e siècle : extension et premières limites

Au XIX^e siècle, la mécanique classique s'impose comme **le socle de la physique et de la technologie**. Elle permet de développer la thermodynamique, la mécanique des milieux continus et l'hydrodynamique. Cependant, de nouvelles questions apparaissent : la nature de la chaleur, les phénomènes électromagnétiques et les comportements microscopiques mettent en évidence les **limites de la mécanique classique**. La mécanique statistique (Boltzmann, Gibbs) cherche à relier le monde microscopique et macroscopique.

1.1.3 XX^e siècle : relativité et mécanique quantique

Le début du XX^e siècle voit l'émergence de deux révolutions scientifiques : la **relativité** (Einstein) et la **mécanique quantique** (Planck, Schrödinger, Heisenberg).

Ces nouvelles théories corrigent et dépassent Newton, en décrivant respectivement les phénomènes à grande vitesse ou à grande échelle cosmique, et les comportements de la matière à l'échelle atomique. Néanmoins, elles s'appuient toujours sur les formulations analytiques héritées de Lagrange et Hamilton.

1.1.4 Aujourd'hui : héritage et actualité

La mécanique théorique classique conserve aujourd'hui une place essentielle. Elle reste le **socle pédagogique** dans l'enseignement des sciences et des techniques, et fournit encore une approximation valable dans de nombreux domaines (astronautique, ingénierie, sciences appliquées). De plus, ses formulations hamiltonienne et lagrangienne restent centrales dans la physique théorique contemporaine, notamment en théorie des champs et en physique des particules.

Conclusion Depuis Newton, la mécanique a façonné l'histoire des sciences en servant **de modèle de rationalité et de prédiction**. Bien que la relativité et la mécanique quantique aient élargi notre vision de la nature, la mécanique classique demeure un cadre incontournable, à la fois pour comprendre le monde quotidien et pour préparer l'accès aux théories plus avancées.

1.2 Intérêt de la mécanique en physique

La mécanique classique (ou mécanique newtonienne, lagrangienne et hamiltonienne) est l'un des **piliers fondateurs de la physique**. Son rôle est multiple : elle fournit à la fois un cadre conceptuel, une méthode de modélisation et une base de transition vers les théories modernes.

1.2.1 Un cadre pour décrire le mouvement

- Elle formalise les lois générales du mouvement (Newton, principes variationnels).
- Elle permet de prédire l'évolution de systèmes allant de la particule isolée jusqu'aux systèmes complexes (corps rigides, fluides, champs).
- Elle introduit des concepts fondamentaux : forces, énergie, quantité de mouvement, moment cinétique.

1.2.2 Outil universel de modélisation

- En chimie et physique moléculaire, elle aide à comprendre le mouvement des atomes et molécules (avant de passer à la mécanique quantique).
- En physique appliquée, elle sert à modéliser le comportement de systèmes réels (projectiles, planètes, pendules, oscillateurs).
- En sciences de l'ingénieur, elle est la base des calculs de structures et de machines.

1.2.3 Base conceptuelle pour d'autres théories

La mécanique classique est le point de départ historique et conceptuel vers :

- la mécanique relativiste (Einstein corrige Newton pour les vitesses proches de c la vitesse de la lumière),
- la mécanique quantique (Planck, Schrödinger, Heisenberg utilisent les structures lagrangienne/hamiltonienne),
- la mécanique statistique (Boltzmann, Gibbs).

Les formulations lagrangienne et hamiltonienne sont toujours utilisées en physique théorique moderne (théorie des champs, physique des particules).

1.2.4 Outil pédagogique et méthodologique

- Elle apprend à modéliser un système complexe par des idéalizations (point matériel, corps rigide, oscillateur).
- Elle initie aux méthodes mathématiques (équations différentielles, optimisation, analyse variationnelle).
- Elle développe le raisonnement causal et déterministe : connaître l'état initial pour prédire le futur.

Exemples concrets de rôle en physique

Astronomie : prédiction des orbites planétaires (lois de Kepler → Newton).

Mécanique des fluides : équations d'Euler et de Navier-Stokes dérivent de la mécanique classique.

Acoustique : propagation des ondes sonores modélisée comme oscillations mécaniques.

Électrodynamique : avant Maxwell, on modélisait les charges comme particules soumises à des forces mécaniques.

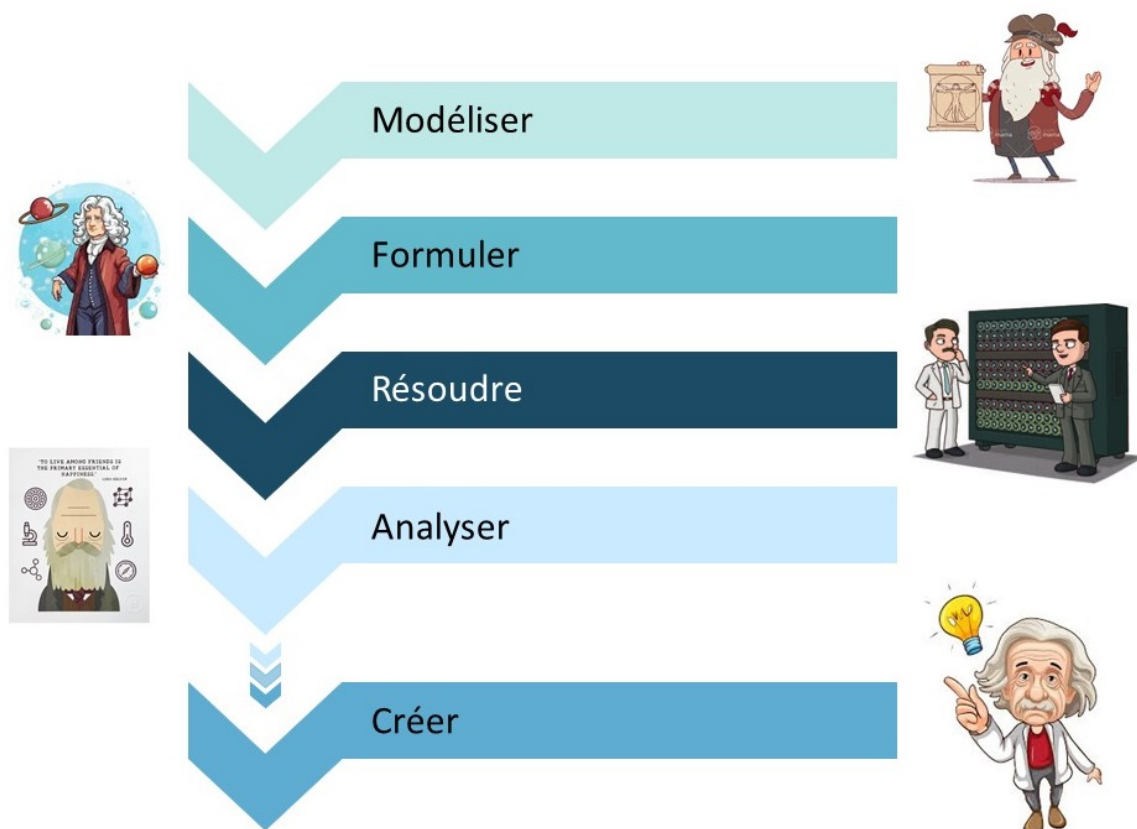
En résumé : La mécanique classique est à la physique ce que l'alphabet est au langage : un socle. Elle permet d'expliquer une immense variété de phénomènes du quotidien, sert de **pont entre les disciplines**, et reste indispensable même à l'ère de la relativité et de la mécanique quantique, parce qu'elle constitue la limite "intuitive" et approximative de ces théories plus avancées.

Première partie
Dynamique du point matériel

MODÉLISATION DES SYSTÈME

2.1 Démarche scientifique

La mécanique est l'origine de la démarche scientifique moderne.



1. Analyse du système et modélisation

- Définir le *système* : point matériel de masse m , liaisons éventuelles, milieu (air, fluide, contact).
- Schématiser clairement le système avec une figure.

- Poser les *hypothèses* : frottements négligés ou non, champ de pesanteur uniforme, planéité du mouvement, etc.
2. **Écriture des équations du mouvement**
 - Choix de la formulation du problème : Principe des Puissances virtuelles (**PPV**); Principe Fondamentale de la Dynamique (**PFD**); Théorème de l'énergie cinétique (**TEC**); Équations de Lagrange
 - Obtenir une (ou plusieurs) équation(s) différentielle(s) du second ordre.
 3. **Résolution des équations**
 - Solutions analytiques pour les systèmes linéaires (mouvement uniformément accéléré, oscillateur harmonique).
 - Recours à l'intégration numérique pour les systèmes complexes ou non-linéaires.
 - Conditions initiales.
 4. **Interprétation et vérification**
 - Analyser les résultats : Tracer les efforts de liaisons, la puissance d'entrée, la puissance de sortie, la puissance dissipée, calculer le rendement.
 - Vérifier la cohérence dimensionnelle et physique : unités, ordre de grandeurs.
 - Comparer avec des résultats expérimentaux et/ou d'autre modélisations et/ou des résultats existants sur des systèmes similaires.

2.2 Analyse du système et modélisation

Hypothèses classiques

1. **Définir précisément le système étudié**
 - Schéma système ;
 - Nombre de points ;
 - Liaison(s) éventuelle(s) ;
 - Milieu extérieur.
2. **Dimension de l'espace physique**
 - Cadre général (3D) ;
 - Mouvement plan (2D) ;
 - Mouvement rectiligne (1D).
3. **Champ de pesanteur**
 - Uniforme ;
 - Négligé (l'action de pesanteur est négligée devant les autres actions mécaniques) ;
4. **Effet d'inertie**
 - Pris en compte ;
 - Négligé (hypothèse d'évolution quasi-statique, masse négligeable).
5. **Effet dissipatif**

- Système conservatif, pas de dissipation.
- Frottement visqueux ;
- Frottement sec.

6. Choix d'un référentiel galiléen, \mathcal{R}_g

- Référentiel héliocentrique : Il prend le Soleil comme centre. Utilisé en astrophysique, mécanique céleste et pour décrire les orbites planétaires avec précision.
- Référentiel géocentrique : C'est un référentiel où le centre de la Terre est pris comme origine. Il est utilisé notamment en astronomie ou en géophysique.
- **Le référentiel terrestre** : liée à la surface de la terre. Il est valide pour les mouvements proches de la surface terrestre (malgré la rotation de la Terre). Ce référentiel est adéquat pour la plupart des applications d'ingénierie, tant que les effets inertiels dus à la rotation terrestre sont négligeables.

Espace de configuration \mathcal{Q}

L'espace des configurations \mathcal{Q} est l'ensemble de toutes les positions géométriquement possibles d'un système compte tenu des contraintes qui lui sont imposées. Mathématiquement, on introduit un ensemble de "coordonnées généralisées" q_i ($\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$).

L'ensemble $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ définit les N degrés de liberté du système (*ddl*). Les *ddl* sont des fonctions du temps t , qui rassemblent toutes les informations nécessaires pour décrire la position du système à un instant t .

Espace des états $T\mathcal{Q}$

Pour décrire le mouvement d'un système, la position seule ne suffit pas et il est nécessaire de connaître également les vitesses. C'est la raison pour laquelle, nous définissons l'espace d'état $T\mathcal{Q}$, tel que

$$T\mathcal{Q} = \{(q_i, \dot{q}_i), q_i \in \mathcal{Q}, \dot{q}_i \in T\mathcal{V}\}. \quad (2.1)$$

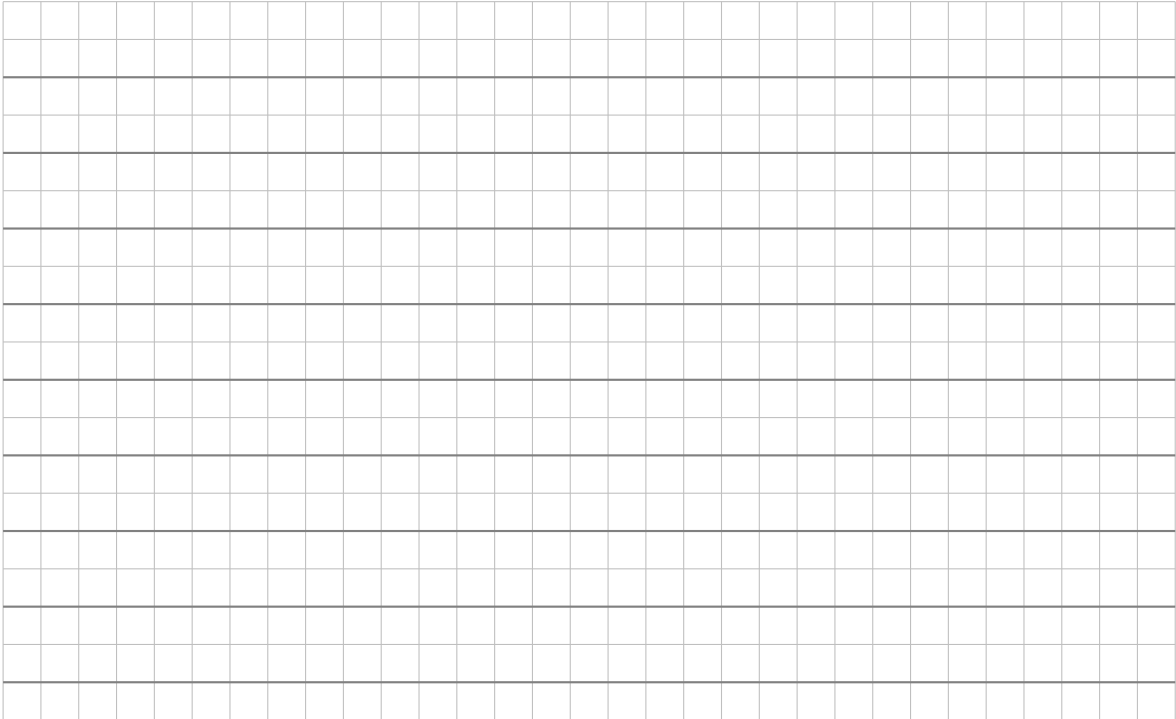
L'espace d'état est l'ensemble des couples position–vitesse (q_i, \dot{q}_i) .

Ici, $T\mathcal{V}$ est l'ensemble des vitesses regroupe les dérivées temporelles des *ddl* :

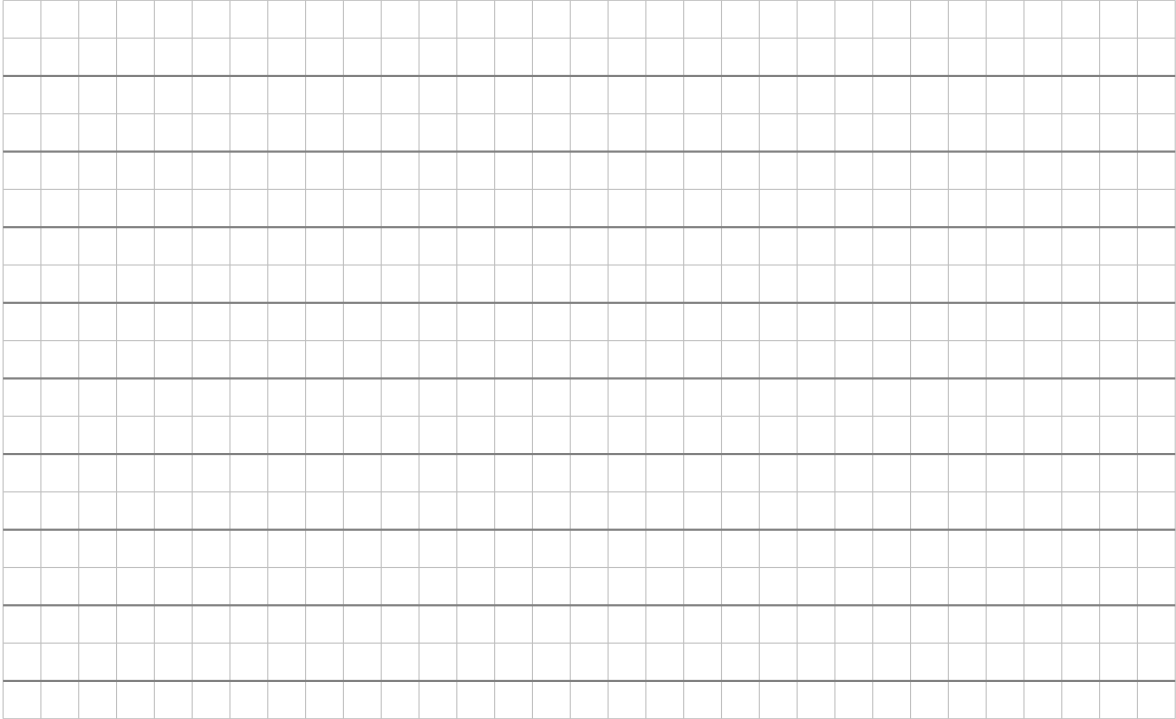
$$T\mathcal{V} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N\}. \quad (2.2)$$

2.3 Exemples

Exemple 2 : Chute d'un corps



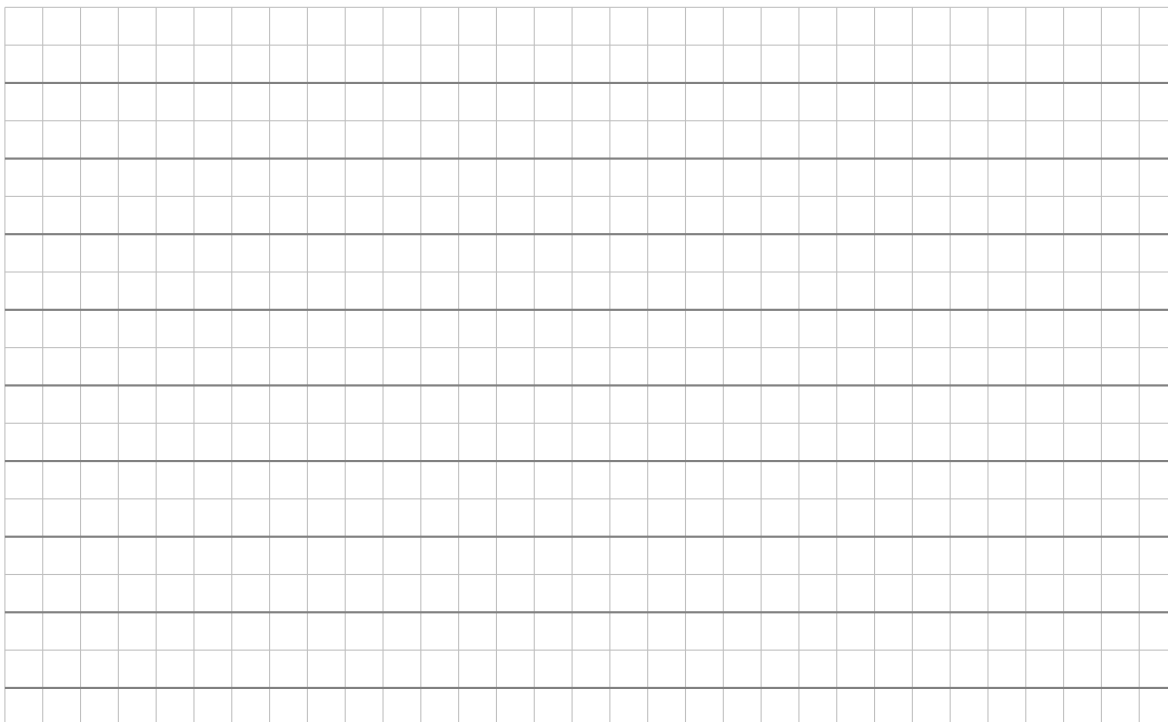
Exemple 3 : Billes de billard



Exemple 4 : Ballon de football



Exemple 5 : Molécule de O_2



Exemple 6 : Système {Terre + Lune}



PRINCIPE FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

Le Principe Fondamentale permet de Formuler un problème de mécanique, c'est à dire d'obtenir les équations du mouvement. Les équations du mouvement servent à décrire et prédire l'évolution temporelle du système (ex : position, vitesse et accélération).

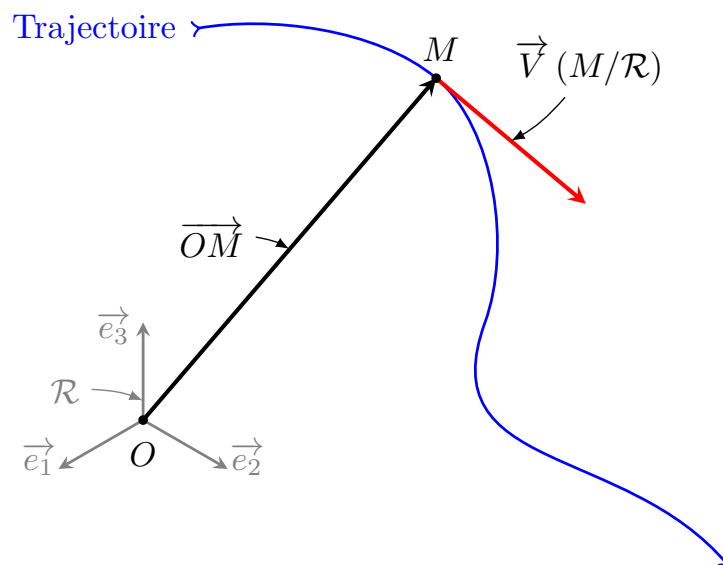


FIGURE 3.1 – Trajectoire du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

3.1 Préambule : cinématique du point

La cinématique est l'étude scientifique du mouvement indépendamment des causes qui le produisent. Elle se concentre sur la position, la vitesse et l'accélération des objets en fonction du temps.

Vecteur position et trajectoire

Le vecteur position du point M est le vecteur reliant O (l'origine du repère \mathcal{R}) au point M :

$$\overrightarrow{OM} = f_1(t)\vec{e}_1 + f_2(t)\vec{e}_2 + f_3(t)\vec{e}_3$$

où $f_1(t)$, $f_2(t)$ et $f_3(t)$ sont trois fonctions du temps qui donnent les coordonnées de M dans $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à chaque instant t . Notons que ces fonctions sont homogènes à des distances, c'est-à-dire que dans le système international d'unités, elles s'expriment en mètres $[m]$.

La trajectoire d'un point M dans un référentiel \mathcal{R} est l'ensemble des positions successives occupées par le point M dans le repère $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ lorsque le temps varie.

Référentiel

Un référentiel est un solide, lié à un observateur (réel ou imaginaire) par rapport auquel on définit la position et le mouvement.

D'un point de vue mathématique, il est défini par un repère, $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, comprenant une origine O et une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, soit trois axes indépendants. Nous choisirons une base **orthonormée** et **directe** pour des raisons de simplicité.

Vecteur vitesse

La variation de position de M dans \mathcal{R} entre deux instants infinitésimalement proches est caractérisée par le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ défini par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}.$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{f}_1(t)\vec{e}_1 + \dot{f}_2(t)\vec{e}_2 + \dot{f}_3(t)\vec{e}_3$$

où $\dot{f}_1(t)$ désigne la dérivée de $f_1(t)$ par rapport au temps.

Notons que la dimension physique d'une vitesse est une longueur L sur un temps T . Dans le système international d'unités, la vitesse s'exprime en mètres par seconde $[m.s^{-1}]$.

Propriété 3.1 *Le vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ est tangent à la trajectoire de M dans \mathcal{R} .*

Propriété 3.2 *Pour tous points A fixe dans le repère $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on a*

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1 *Calculer une vitesse par rapport à un repère \mathcal{R} ne signifie pas qu'il faille exprimer cette vitesse dans la base liée à ce repère.*

Vecteur accélération

L'accélération d'un point M par rapport au repère \mathcal{R} , $\vec{a}(M/\mathcal{R})$, est la variation au cours du temps du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$. Le vecteur accélération d'un point M par rapport au repère \mathcal{R} , $\vec{a}(M/\mathcal{R})$, s'exprime donc à l'aide de la formule :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

La dimension physique d'une accélération est une longueur L sur le carré d'un temps T^2 . Dans le système international d'unités, l'accélération s'exprime en mètres par seconde au carré [$m.s^{-2}$].

3.2 Principe Fondamentale de la Dynamique

Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point M de masse m , dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , est :

$$\vec{p}(M/\mathcal{R}_g) = m \vec{V}(M/\mathcal{R}_g).$$

où $\vec{V}(M/\mathcal{R}_g)$ la vitesse du point M par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Propriété 3.3 *La quantité d'un ensemble de n point matériel $S = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ est la somme des quantités de mouvement de chaque point matériel*

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_g)$$

Énoncé du PFD

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , pour un point matériel M de masse m , on a :

$$\left. \frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

où $\vec{p}(M/\mathcal{R}_g)$ la quantité de mouvement du point M par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g et $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum \vec{F}_{i \rightarrow M}$ la somme des forces s'exerçant sur M .

Remarque 3.2

— Si la masse m est constante, cela se simplifie que :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

- Pour les systèmes à masse variable, on conserve la forme générale.
- En l'absence de forces extérieures ($\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$), le point matériel conserve sa vitesse (1^{ère} loi de Newton).

Théorème des actions réciproques

La force d'un point matérielle M_1 sur un point matérielle M_2 est l'opposée de la force de M_2 sur M_1

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}.$$

Les trois lois de Newton

On retrouve ici les 3 lois de Newton vues au 1er semestre de L1.

Première loi : Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme tant qu'aucune force ne s'exerce sur lui, ou si la résultante des forces qui s'exercent est nulle.

Deuxième loi : Dans un référentiel inertiel, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces appliquée.

Troisième loi : Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ sur un corps B , alors B exerce en retour une force $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ sur A , de même intensité, de même direction, mais de sens opposé.

Utilisation du PFD

Pour formuler un problème avec n points en dimension D à l'aide du PFD, on s'appuie sur la modélisation et schématisation du système. Puis, on applique l'algorithme suivant :

1. LISTER

- LISTER le nombre d'équation du mouvement : $n_e = D n$
- LISTER les forces et les inconnues statique I_s
- LISTER les coordonnées généralisées : $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ et inconnues cinématiques I_c
- LISTER les inconnues du problème : $I = I_c + I_s$

2. TESTER

La validité du modèle

- SI $I = n_e$ le modèle est valide
- SINON revoir la modélisation du problème

3. FORMULER

- Appliquer le PFD sur chaque point du système

4. RÉSOUDRE

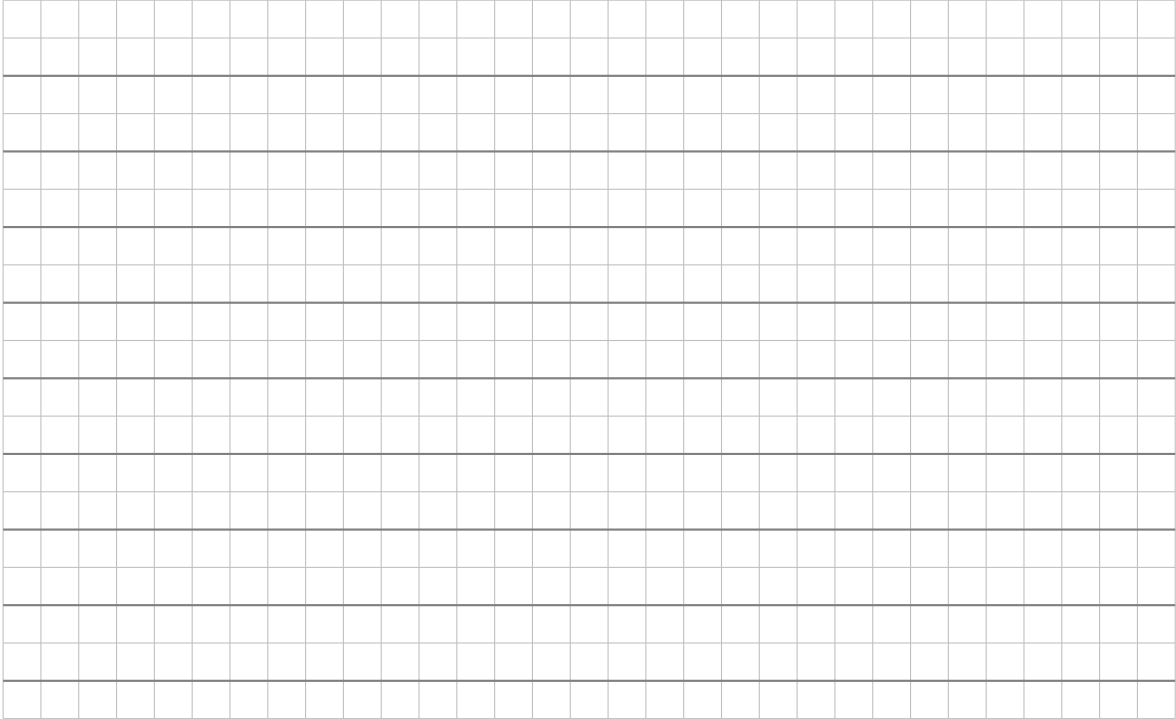
- Projeter les équations vectorielles dans une base

3.3 Exemples

Exemple 1 : Chute d'un corps ; Action de pesante



Exemple 2 : Système masse ressort ; Action d'un ressort



Exemple 3 : Système masse ressort amortisseur ; Action d'un amortisseur



Exemple 4 : Ballon de football



Exemple 5 : Électron dans un champs électrique

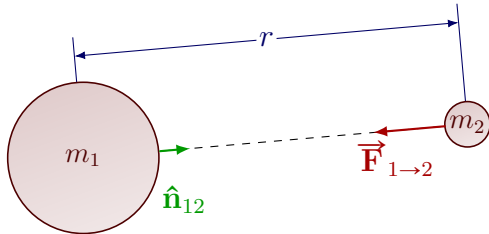


Exemple 6 : Propulsion, système ouvert



3.4 Synthèse sur les actions mécaniques

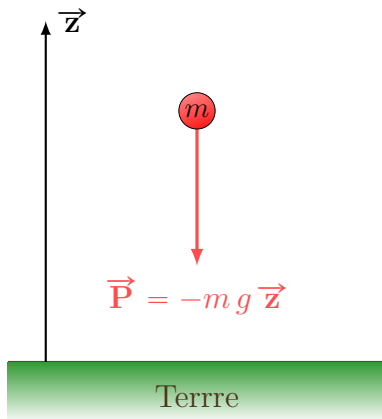
Action de la gravité



$$\vec{F}(1 \rightarrow 2) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{n}$$

où $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ est la constante gravitationnelle

Action de pesanteur



$$\vec{P}(\text{Terre} \rightarrow 1) = -m g \vec{z}$$

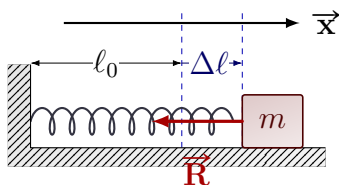
avec $g \approx 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.

Remarque 3.3 L'action de pesanteur est l'approximation de l'action de gravité de la terre sur une masse m lorsqu'on est à la surface de la terre.

$$g = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

où m_T est la masse de la Terre et R_T sont rayon.

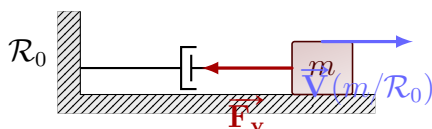
Action d'un ressort



$$\vec{R}(\text{ressort} \rightarrow 1) = -k (l - l_0) \vec{x}$$

où $k > 0$ est la raideur du ressort.
 k a pour unité N.m^{-1} .

Action d'un amortisseur

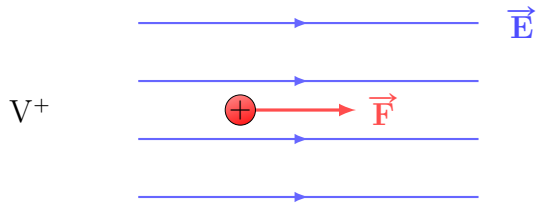


$$\vec{F}_v(\text{amortisseur} \rightarrow 1) = -c \vec{V}(m/\mathcal{R}_0)$$

où $c > 0$ est le coefficient d'amortissement.
 c a pour unité N.s.m^{-1} .

Action électromagnétique

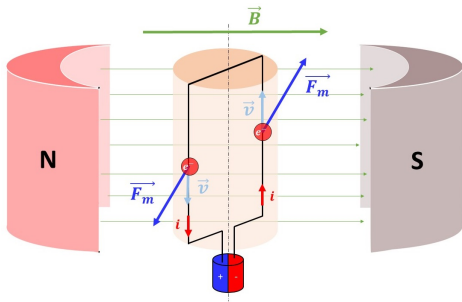
Force de Coulomb



$$\vec{F}_e = -q \vec{E}$$

où q est la charge de la particule et \vec{E} est le champs électrique.

Force magnétique



$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

où q est la charge de la particule,
 \vec{v} sa vitesse
 \vec{B} est le champs magnétique.

L'ÉNERGIE

La notion d'énergie occupe une place centrale en physique. Elle permet de décrire l'état d'un système, de caractériser ses transformations et d'énoncer des lois de conservation fondamentales. L'énergie n'est pas seulement une grandeur calculatoire : elle constitue une quantité universelle qui se conserve dans un système isolé et qui peut se transférer d'une forme à une autre (énergie cinétique, potentielle, thermique, chimique, etc.).

L'unité de mesure de l'énergie dans le Système international (SI) est le **joule** (J), défini par :

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

L'énergie mécanique totale d'un système est la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V .

$$E = T + V,$$

4.1 Énergie cinétique

Définition

On définit l'énergie cinétique d'un ensemble $S = \{M_i\}$ de points matériels de masse $\{m_i\}$ dans le référentiel \mathcal{R} par :

$$T(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left\| \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}) \right\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}).$$

Remarque 4.1 *L'énergie cinétique est une grandeur relative, dépendante du référentiel choisi pour mesurer les vitesses. En revanche, les lois physiques qui relient ses variations au travail des forces restent valides et cohérentes dans tout référentiel galiléen.*

Exemple : Tour de chute



Définition atomistique de la température

La température est une grandeur macroscopique qui rend compte de l'état d'agitation microscopique des particules (atomes ou molécules) constituant un système. Elle est directement reliée à l'énergie cinétique moyenne des particules.

Énergie cinétique microscopique

Considérons un gaz parfait constitué de N particules de masse m . On définit alors l'énergie cinétique moyenne par particule :

$$\langle \varepsilon_c \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \left\| \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_0) \right\|^2.$$

où les vitesses sont mesurées dans le référentiel inertielle, c'est-à-dire liée au centre de masse du système \mathcal{R}_i , qui est supposé galiléen.

Le théorème de l'équipartition de l'énergie permet de définir la température absolue T (exprimée en kelvins, K) telle que :

$$\langle \varepsilon_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T,$$

où $k_B \simeq 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann,

Conséquences physiques

La température mesure le degré d'agitation des particules : plus T est élevée, plus les vitesses moléculaires sont grandes en moyenne.

Cette définition atomistique justifie plusieurs propriétés macroscopiques :

- lorsque la température augmente, l'énergie cinétique moyenne croît, ce qui amplifie les vibrations des atomes dans un solide. Au-delà d'un certain seuil, l'agitation devient suffisante pour briser les liaisons interatomiques : le solide passe à l'état liquide (fusion).
- la pression d'un gaz est liée aux chocs des particules sur les parois, proportionnelle à leur énergie cinétique moyenne :

$$pV = nRT \quad (\text{Loi des gaz parfait})$$

- le zéro absolu ($T = 0 \text{ K}$) correspond à l'état où l'agitation thermique cesse : les particules sont au repos (dans le cadre classique).
- à une température donnée les molécules légères vont plus vite que les molécules lourdes.
- la conductivité thermique d'un gaz ou d'un solide est due au transport d'énergie cinétique par les particules en mouvement : les particules rapides, en se déplaçant d'une région chaude vers une région froide, transfèrent leur énergie et tendent à homogénéiser la température du milieu.

4.2 Énergie potentielle

L'énergie potentielle est une grandeur associée à la position d'un système dans un champ de forces. Elle traduit la capacité de ce système à produire du travail sous l'action de forces **conservatives**.

Forces conservatives

Une force \vec{F} est dite conservative si le travail qu'elle fournit ne dépend que des positions initiale et finale, et non du chemin suivi. On peut alors introduire une fonction scalaire $V(\vec{r})$ qui dépend de la position de la particule \vec{r} , appelée **énergie potentielle**, telle que :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

où $\vec{\nabla}V(\vec{r})$ est le gradient de V au point \vec{r} .

Définition de l'énergie potentielle

Soit un point matériel M de masse m soumis à une force conservative \vec{F} . On définit l'énergie potentielle associée par :

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

où \vec{r}_0 est une position de référence. Cette définition n'est valable que si \vec{F} est conservative.

Exemples classiques

— Poids (champ de pesanteur uniforme) :

$$\vec{F} = -mg \vec{z}, \quad V(z) = mgz + C.$$

— Ressort (loi de Hooke) :

$$\vec{F} = -k(x - l_0) \vec{x}, \quad V(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + C.$$

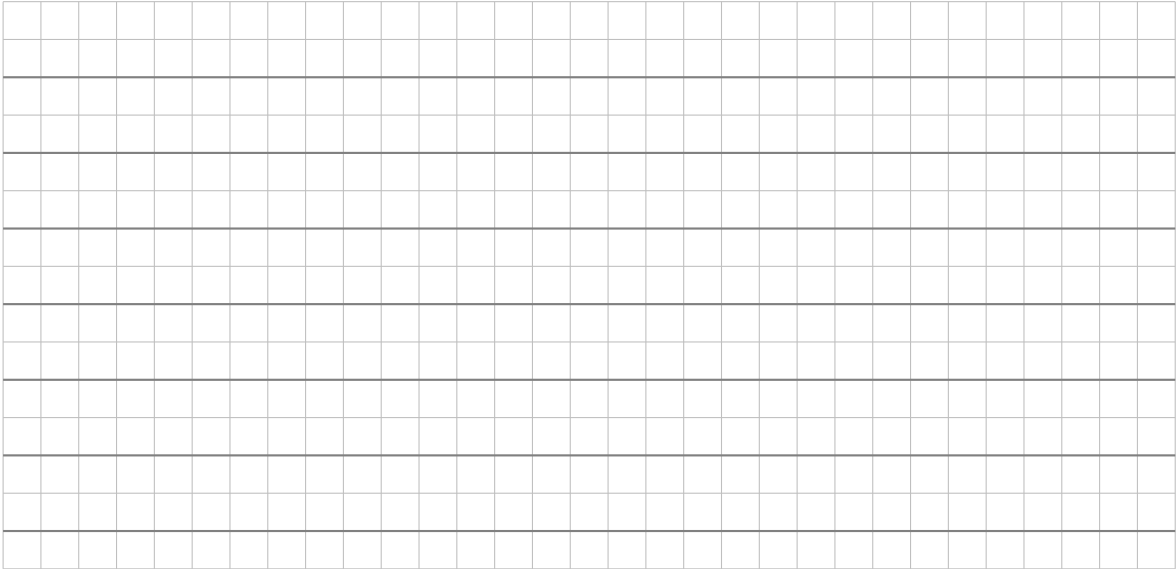
— Interaction gravitationnelle newtonienne :

$$\vec{F}_{m_1 \rightarrow m_2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{n}, \quad V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + C.$$

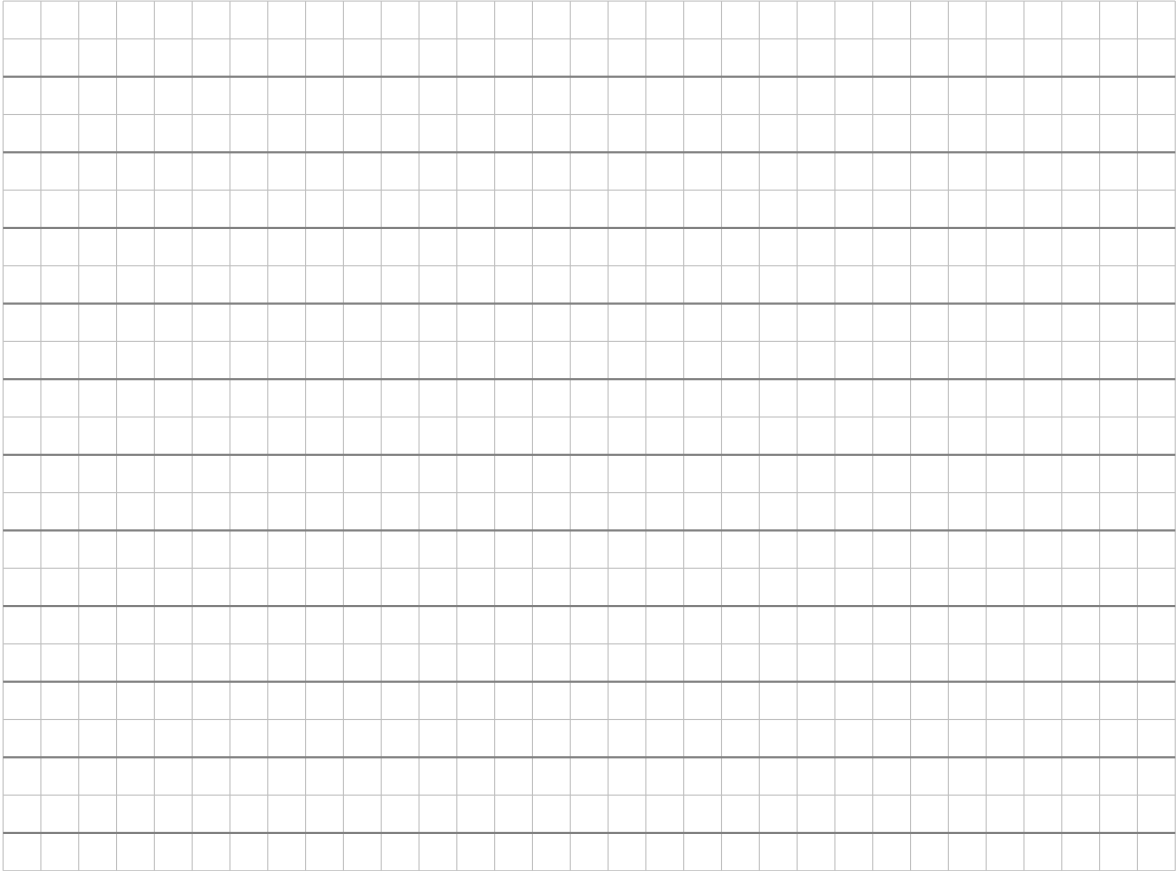
— Interaction électrostatique :

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = q_2 \vec{E} \vec{n}, \quad V(r) = q_2 V_{elec}(r) + C$$

Saut à l'élastique



Systeme terre-soleil-lune



Electron autour d'un noyau



Liaisons chimiques O₂, H₂O



Rôle de l'énergie potentielle

- Elle permet d'introduire l'énergie mécanique totale :

$$E = T + V,$$

somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

- Les minima locaux de V correspondent à des positions d'équilibre stable, les maxima à des équilibres instables.

Diffusion



4.3 Conservation de l'énergie

Énoncé

Pour un système soumis uniquement à des forces conservatives (ou forces qui dérivent d'un potentiel), la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle reste constante au cours du temps :

$$E = T + V = C^{st}$$

où

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Démonstration dans le cas 1D

La dérivée de l'énergie totale est :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

Or la dérivée de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right] = m \dot{r} \ddot{r}$$

Celle de l'énergie potentiel s'obtient à l'aide de la formule des dérivée composées

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = -F \dot{r}$$

En combinant les deux dernières équations, on obtient

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{r} \ddot{r} - F \dot{r} = (m \ddot{r} - F) \dot{r} = 0$$

On retrouve le PDF entre les parenthèses pour un système conservatif, c'est-à-dire dont les forces dérivent d'un potentiel.

CQFD

La généralisation au cas multidimensionnel est laissé à titre d'exercice au lecteur.

4.4 Les différentes formes d'énergie

En physique, l'énergie peut se manifester sous différentes formes, qui traduisent des réalités parfois très diverses mais reliées par le même concept fondamental.

Énergie mécanique : elle regroupe l'énergie cinétique (liée au mouvement) et l'énergie potentielle (liée à la position dans un champ de forces) des objets à notre échelle.

Énergie thermique : elle correspond à l'agitation microscopique des particules d'un corps (atomes, molécules, ions). Elle est en réalité une somme d'énergies cinétiques et potentielles désordonnées, que l'on ne peut suivre individuellement mais que l'on décrit statistiquement.

Énergie chimique : il s'agit de l'énergie stockée dans les liaisons entre atomes au sein des molécules. Sa description complète nécessite la mécanique quantique, mais on peut la comprendre comme une combinaison d'énergie potentielle et d'énergie cinétique des particules constitutantes.

Énergie nucléaire : elle provient des forces de cohésion entre nucléons (protons et neutrons) dans le noyau atomique. Comme pour l'énergie chimique, elle résulte d'une combinaison d'énergies cinétiques et potentielles à l'échelle subatomique.

Énergie électrostatique : c'est une forme d'énergie potentielle liée aux interactions d'attraction ou de répulsion entre particules chargées. Avec l'énergie gravitationnelle, elle constitue l'une des principales formes d'énergie potentielle en physique classique.

Énergie magnétique : plus subtile à interpréter, elle apparaît dans les interactions entre aimants, ou entre courants électriques et champs magnétiques. Les forces magnétiques exercées sur des particules chargées dépendent de leur vitesse, ce qui distingue cette forme d'énergie des autres.

Énergie rayonnante (ondes électromagnétiques) : elle est transportée par les champs électromagnétiques et se manifeste sous forme de lumière, d'ondes radio, de rayons X, etc. On peut l'interpréter comme une combinaison d'énergie électrique et magnétique, stockée dans le champ électromagnétique lui-même.

Remarque 4.2 *Toutes ces formes d'énergie peuvent se transformer les unes dans les autres, mais la quantité totale d'énergie d'un système isolé reste toujours conservée.*

Origine de la dilation thermique



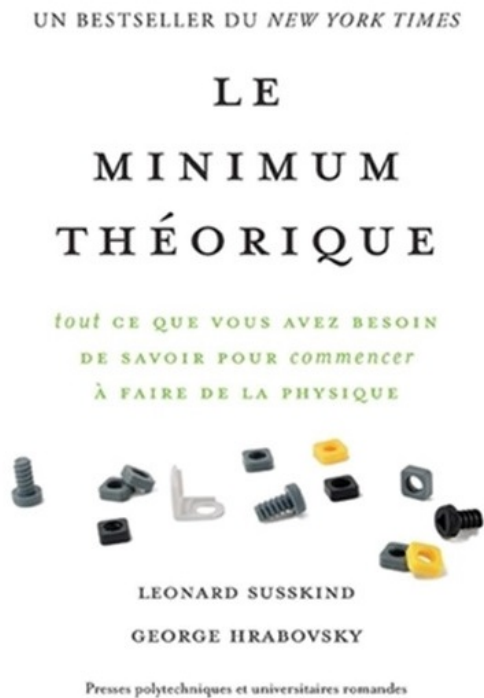
4.5 Introduction à la mécanique rationnelle

Dans cette partie, nous introduisons :

le formalisme lagrangien qui unifie et généralise la mécanique classique en dérivant les équations du mouvement à partir d'un principe fondamental : le principe de moindre action.

le formalisme hamiltonien qui reformule la dynamique sous une forme plus symétrique et plus générale que celle de Newton ou de Lagrange.

Ces formalismes constituent des outils fondamentaux pour l'étude des systèmes complexes, des invariants dynamiques. Ils constituent une étape essentielle vers les formulations modernes de la physique.



Pour en savoir plus, je conseille l'excellent ouvrage de Leonard Susskind & George Hrabosky, *Le minimum théorique - Mécanique Classique* aux éditions Presses polytechniques et universitaires romandes et/ou les vidéos de l'un des auteurs Leonard Susskind sur la chaîne YouTube de l'université de Stanford.

4.5.1 Formalisme Lagrangien

Le formalisme lagrangien constitue une reformulation puissante de la mécanique classique, qui permet de déduire les équations du mouvement à partir d'un principe variationnel plutôt que directement par les lois de Newton.

Le lagrangien

On définit le **lagrangien** L d'un système comme la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V,$$

où (q_i) désignent les coordonnées généralisées du système et (\dot{q}_i) leurs vitesses généralisées. Cette écriture permet de traiter des systèmes complexes, en choisissant des coordonnées adaptées aux contraintes.

L'action

On définit l'**action** S comme l'intégrale temporelle du lagrangien le long d'une trajectoire entre deux instants t_1 et t_2 :

$$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt.$$

L'action est donc un fonctionnel : elle associe un nombre à chaque trajectoire possible.

Principe de moindre action

Le **principe de moindre action** énonce que l'évolution réelle du système est telle que l'action est minimale :

$$\delta S = 0.$$

Cela signifie que parmi toutes les trajectoires reliant deux états donnés du système, la trajectoire physique est celle qui rend l'action minimale.

Équations d'Euler–Lagrange

En appliquant le calcul variationnel, on obtient les équations du mouvement sous la forme des **équations d'Euler–Lagrange** :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \text{pour chaque coordonnée généralisée } q_i.$$

Ces équations remplacent le PFD et sont particulièrement puissantes :

- elles sont indépendantes du choix du référentiel (tant qu'il est galiléen),
- elles intègrent naturellement les contraintes par le choix des coordonnées généralisées,
- elles s'appliquent à la mécanique classique, mais constituent aussi la base de la mécanique quantique et des théories des champs.

4.5.2 Formalisme Hamiltonien

Le formalisme hamiltonien est une reformulation équivalente de la mécanique classique, qui met en avant la structure de l'espace des phases et joue un rôle central dans la mécanique statistique et la mécanique quantique.

Le moment conjugué

À partir du lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, on définit le **moment conjugué** associé à chaque coordonnée généralisée q_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

L'espace des phases

L'**espace des phases** est un espace abstrait dans lequel l'état d'un système mécanique est représenté par un point. Pour un système possédant n degrés de liberté, chaque état est caractérisé par les coordonnées généralisées (q_1, \dots, q_n) et les moments conjugués (p_1, \dots, p_n) . Ainsi, l'espace des phases est de dimension $2n$, et chaque point

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

correspond à un état complet du système.

L'espace des phases offre donc une représentation géométrique globale et unifiée de la dynamique.

Le hamiltonien

Le **hamiltonien** H est ensuite défini par une transformation de Legendre :

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

où les vitesses \dot{q}_i doivent être exprimées en fonction des q_i et des p_i .

Pour les systèmes conservatives, le hamiltonien correspond à l'énergie totale :

$$H = T + V.$$

Équations de Hamilton

Les équations du mouvement se déduisent alors des relations canoniques :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Ces équations forment un système différentiel du premier ordre, équivalent aux équations d'Euler–Lagrange.

4.5.3 Exemple : l'oscillateur harmonique à une dimension

Considérons une particule de masse m soumise à une force de rappel linéaire :

$$F(x) = -kx,$$

où $k > 0$ est la constante de raideur. Le potentiel associé est :

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Formulation newtonien

Le formalisme newtonien repose sur l'espace des états $T\mathcal{Q} = \{\dot{x}, x\}$ et sur le PFD

$$ma = F.$$

On obtient alors :

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

Formulation lagrangienne

Le formalisme newtonien repose également sur l'espace des états $T\mathcal{Q} = \{\dot{x}, x\}$ et sur le lagrangien, qui est défini comme la différence entre énergie cinétique et énergie potentielle :

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

On obtient alors :

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

soit la même équation différentielle que l'approche newtonienne.

Formulation hamiltonienne

Le formalisme hamiltonien repose sur l'espace des phase $\{q, x\}$ où q est le moment conjugué défini par :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Le hamiltonien est obtenu par transformation de Legendre :

$$H(x, p) = p\dot{x} - L = T(p) + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx. \end{cases}$$

En dérivant la première équation et en substituant la seconde, on retrouve :

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

SYSTÈMES DISSIPATIFS

Contrairement à un système conservatif où l'énergie totale se conserve, un système dissipatif dissipe une partie de son énergie au cours du temps. Autrement dit, un système dissipatif est un système physique ou mécanique dont l'évolution entraîne une perte d'énergie mécanique sous forme de chaleur, de frottements, de bruit ou de toute autre forme non réversible.

Les systèmes dissipatifs sont indispensables pour représenter la réalité des systèmes physiques à notre échelle. Leur modélisation permet d'intégrer les phénomènes d'amortissement, et donc de mieux prévoir et contrôler la réponse et la stabilité des systèmes étudiés en ingénierie.

5.1 Puissance

Définition

La **puissance mécanique instantanée** est définie comme la quantité d'énergie transférée ou transformée par unité de temps. Donc l'unité de la puissance est :

$$[P] = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W} \quad (\text{Le Watt}).$$

Dans le cas d'une force \vec{F} appliquée à un point matériel de vitesse \vec{v} , la puissance instantanée s'écrit :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Ainsi, la puissance traduit la *rapidité avec laquelle une force fournit ou absorbe de l'énergie*.

Considérons un système mécanique constitué de n points matériels, de masses m_i , soumis à des forces $\vec{F}_{\rightarrow i}$ et possédant des vitesses $\vec{V}(M_i/\mathcal{R})$.

La **puissance mécanique instantanée totale** du système est donnée par la somme des puissances élémentaires de chaque point :

$$P = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{F}}_{\rightarrow i} \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}).$$

Ainsi, la puissance totale est l'addition des contributions de chaque force sur chaque point matériel.

Bilan de puissance

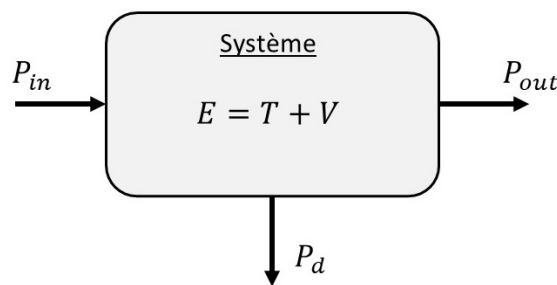


FIGURE 5.1 – Bilan de puissance d'un système mécanique

La figure ?? représente le bilan de puissance d'un **système mécanique dissipatif** d'énergie totale : $E = T + V$, qui peut s'écrire :

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{out} - P_d.$$

Cette équation exprime que la variation de l'énergie interne du système ($\frac{dE}{dt}$) est due à :

- la puissance fournie au système (P_{in}),
- la puissance utile transmise en sortie (P_{out}),
- la puissance dissipée sous forme de pertes (P_d).

Rendement instantané

Le **rendement instantané**, noté $\eta(t)$, est un indicateur de la qualité de la transmission ou de la conversion d'énergie dans un système mécanique ou énergétique. Il se définit comme le rapport entre la puissance utile délivrée en sortie et la puissance fournie en entrée :

$$\eta(t) = \frac{P_{out}(t)}{P_{in}(t)},$$

avec $0 \leq \eta(t) \leq 1$.

Que devient l'énergie dissipée

L'énergie dissipée entre les instants t_0 et t_1 est, par définition :

$$E_d = \int_{t_0}^{t_1} P_d dt$$

Cette énergie n'est pas détruite, mais elle est généralement **transformée en chaleur** en raison de phénomènes irréversibles tels que :

- les frottements secs (contact solide–solide),
- les frottements visqueux (contact solide–fluide),

ce qui entraîne une élévation de température de certaines parties du système ou de son environnement.

Il convient également de noter qu'une partie de cette énergie peut être dissipée sous forme d'ondes acoustiques ou d'ondes de choc dans le milieu extérieur.

Lien avec la thermodynamique

Le bilan de puissance d'un système :

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{out} - P_d.$$

est une forme simplifiée du **premier principe de thermodynamique**, qui s'écrit sous la forme générale :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}.$$

où :

- E est l'énergie totale interne du système (mécanique + thermique + chimique...),
- \dot{Q} est la puissance thermique échangée avec l'extérieur,
- \dot{W} est la puissance mécanique échangée (travail des forces extérieures).

Ce principe exprime que l'énergie ne peut ni être créée, ni détruite : elle se transforme ou se transfère.

Le plus souvent dans un système mécanique, la puissance mécanique échangée est $\dot{W} = P_{in} - P_{out}$ et la puissance thermique échangée avec le milieu (ou production de chaleur instantanée) se fait via les phénomènes dissipatifs $\dot{Q} = -P_d$.

De plus, la puissance dissipée induit toujours une augmentation de l'énergie du milieu extérieur au système :

$$P_d \geq 0,$$

ce qui illustre le caractère irréversible des processus dissipatifs, en accord avec le **deuxième principe de la thermodynamique**.

5.2 Théorème de l'énergie cinétique

Énoncé général

Considérons un système mécanique formé de n points matériels M_i de masses m_i , soumis à des forces qui peuvent être de trois types :

- des **forces conservatives** (associées à une énergie potentielle),
- des **forces dissipatives** (frottements secs, frottement visqueux),
- des **forces extérieures non conservatives**.

Le **théorème de l'énergie cinétique** énonce que la dérivée temporelle de l'énergie cinétique totale du système est égale à la puissance instantanée des forces appliquées au système :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\rightarrow i} \cdot \vec{V}(M_i/\mathcal{R}),$$

où $T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{V}(M_i/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M_i/\mathcal{R})$ l'énergie cinétique totale, et $\vec{F}_{\rightarrow i}$ désigne la force résultante appliquée au point M_i .

Démonstration dans le cas d'une particule

Considérons une particule de masse m soumise à une force \vec{F} . D'après le PFD :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{F},$$

où $\vec{a} = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g}$ est l'accélération du point M par rapport au référentiel \mathcal{R}_g supposé galiléen. On calcule la puissance développée par la force :

$$\vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_g) = m \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_g).$$

Or, on reconnaît la dérivée de l'énergie cinétique :

$$m \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{V}(M/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_g) \right).$$

Ainsi :

$$\frac{dT(M/\mathcal{R}_g)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_g).$$

C.Q.F.D.

5.3 Frottement visqueux

Le **frottement visqueux** correspond à la résistance rencontrée par un solide en mouvement dans un fluide (air, eau, huile) ou par deux pièces en mouvement relatif séparées par un film fluide lubrifiant.

Force visqueuse

La force visqueuse exercée par un fluide sur une particule M se déplaçant à la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}_f)$ par rapport à \mathcal{R}_f , le référentiel associé au centre de masse au fluide, est :

$$\vec{F}_v = -c \vec{V}(M/\mathcal{R}_f)$$

où $c > 0$ est le coefficient de frottement visqueux qui a pour unité $[\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}] = [\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}]$.

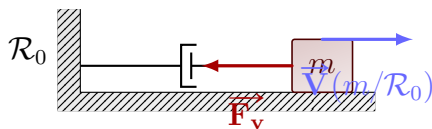
Puissance dissipée

La puissance dissipée correspondante est :

$$P_d = -\vec{F}_v \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_f) = c \vec{V}(M/\mathcal{R}_f) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_f) = c \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_f)\|^2 \geq 0$$

Modélisation par amortisseur visqueux

Dans la pratique, le frottement visqueux est souvent représenté par un **amortisseur visqueux** (ou dashpot), constitué d'un piston se déplaçant dans un fluide visqueux.



$$\vec{F}_{v \rightarrow 1} = -c \vec{V}(m/\mathcal{R}_0) = -c \dot{x} \vec{x}$$

où $c > 0$ est le coefficient d'amortissement. c a pour unité $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$.

5.4 Frottement sec

Le **frottement sec** apparaît lorsqu'un solide glisse ou tente de glisser sur la surface d'un autre solide. C'est un phénomène dissipatif qui transforme l'énergie mécanique en chaleur.

Force de frottement

La force de frottement sec \vec{F}_f est une force qui s'oppose à la vitesse glissement $\vec{V}(M/S)$ d'un point M par un solide S .

$$\vec{F}_f \cdot \vec{V}(M/S) \leq 0$$

Puissance dissipée

Si une force de frottement \vec{F}_f agit sur un point matériel animé d'une vitesse $\vec{V}(M/S)$ en contact avec un solide S , la puissance dissipée est donnée par :

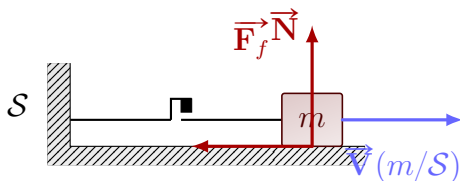
$$P_d = -\vec{F}_f \cdot \vec{V}(M/S).$$

Le signe négatif traduit le fait que le frottement s'oppose toujours au mouvement, ce qui implique :

$$P_d \geq 0.$$

Modélisation par patin-frottement

Une modélisation classique du frottement sec consiste à représenter le contact par un **patin en frottement**.



$$\text{Si } \vec{V}(m/S) = \vec{0} \text{ alors } \|\vec{F}_f\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

$$\text{Si } \vec{V}(m/S) \neq \vec{0} \text{ alors } \|\vec{F}_f\| = \mu_d \|\vec{N}\|$$

Lois de Coulomb

Les lois de Coulomb permettent de modéliser le frottement sec de manière simplifiée.

1. **Au repos (adhérence)** : Tant que le solide ne glisse pas ($\vec{V}(M/S) = \vec{0}$), la force de frottement s'ajuste à la force appliquée pour empêcher le mouvement, dans la limite :

$$\|\vec{F}_f\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|,$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique et \vec{N} l'effort normal au contact.

2. **En mouvement (glissement)** : Lorsqu'il y a glissement ($\vec{V}(M/S) \neq \vec{0}$), la force de frottement est proportionnelle à la force normale au contact et dirigée à l'opposé de la vitesse relative :

$$\vec{F}_f = -\mu_d \|\vec{N}\| \frac{\vec{V}(M/S)}{\|\vec{V}(M/S)\|},$$

où μ_d est le coefficient de frottement dynamique (avec $\mu_d \leq \mu_s$).

5.5 Exemples

Exemple 1 : Chute d'un corps



Exemple 2 : Trajectoire d'une balle



Exemple 3 : Système masse amortisseur ressort



Exemple 4 : Masse sur un plan incliné



Exemple 5 : Frein d'ascenseur

The image shows a large, empty grid consisting of 20 columns and 30 rows of small squares. This grid is intended for technical drawing or calculation related to the example title 'Exemple 5 : Frein d'ascenseur'.

SYSTÈMES CONTRAINTS

Un système contraint est un point matériel (ou un ensemble de points) dont le mouvement n'est pas totalement libre dans l'espace, mais soumis à des conditions géométriques imposées par l'environnement.

Il existe 2 type de contraintes :

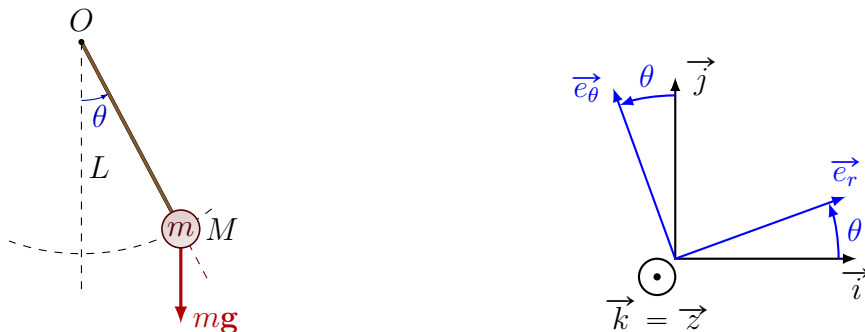
Holonomes : s'expriment par des relations géométriques entre coordonnées.

Non holonomes : contraintes qui portent sur les vitesses (ex. roulement sans glissement).

L'étude des contraintes est indispensable car :

1. Elle reflète la réalité (aucun système n'est totalement libre).
2. Elle permet de simplifier et modéliser correctement les problèmes.
3. Elle fournit le lien direct entre mécanique du point et mécanique du solide.

6.1 Pendule simple



Le pendule simple est en apparence un exemple simple, mais riche en concepts très utiles en sciences et en ingénierie :

- Modélisation : prise en compte de contraintes, paramétrages conformes
- Formalisation : méthode énergétique
- Résolution : équation différentielles non-linéaires, linéarisation, méthodes numériques

- Analyse et optimisation : mesure de g , mesure de la vitesse rotation de la terre, horlogerie, sismographe, robotique, ...

Le pendule simple est un système mécanique constitué :

- d'un point matériel M (masse ponctuelle m)
- suspendu à une tige ou un fil inextensible et de masse négligeable, fixé au point O , de longueur $L = \|\overrightarrow{OM}\|$
- soumis à la gravité

Modélisation

On fait les hypothèses suivantes :

- le problème est en 2D $\overrightarrow{OM} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} = r\vec{\mathbf{e}}_r$
- l'accélération de pesanteur uniforme est $\vec{\mathbf{g}} = +g\vec{\mathbf{i}}$
- le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ est supposé galiléen
- l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{i}}$ et $\vec{\mathbf{e}}_r$ est θ

L'espace des configurations :

$$Q = \{x, y\}$$

L'espace des états :

$$\mathcal{T}_Q = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$$

La contrainte est :

$$r - L = \sqrt{x^2 + y^2} - L = 0$$

La vitesse et accélération de M par rapport au référentiel galiléen sont

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}) &= \dot{x}\vec{\mathbf{i}} + \dot{y}\vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{a}}(M/\mathcal{R}) &= \ddot{x}\vec{\mathbf{i}} + \ddot{y}\vec{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

qui peuvent s'exprimer en coordonnées polaire (r, θ)

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}) &= \dot{r}\vec{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta \\ \vec{\mathbf{a}}(M/\mathcal{R}) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\mathbf{e}}_\theta\end{aligned}$$

6.1.1 Stratégie 1 : Méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation consiste à remplacer la contrainte par ressort de raideur k et de longueur à vide L .



6.1.2 Stratégie 2 : Ajout d'une inconnue de force

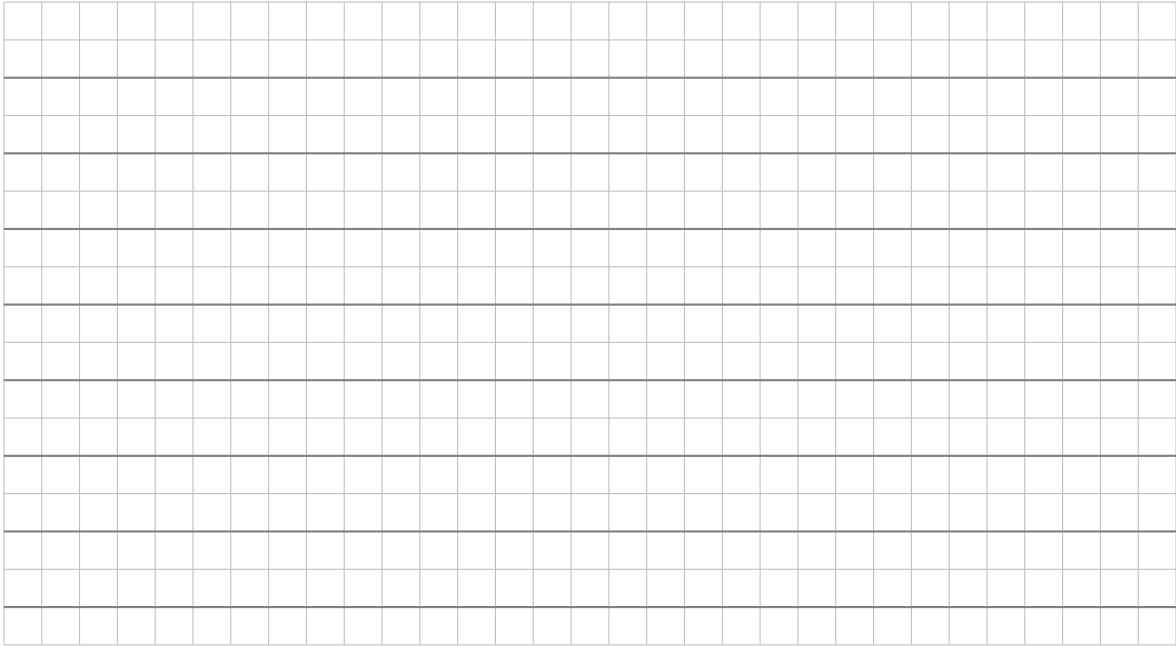
La seconde stratégie est d'imposer la contrainte en utilisant un paramétrage bien choisi et d'ajouter une force \vec{T} inconnue.



6.1.3 Résolution

Dans cette partie, nous présentons deux méthodes pour résoudre les équations du mouvement.

Résolution analytique : Linéarisation

A large grid for analytical solution, consisting of 20 columns and 20 rows of small squares.

Résolution numérique

Transformation de l'équation

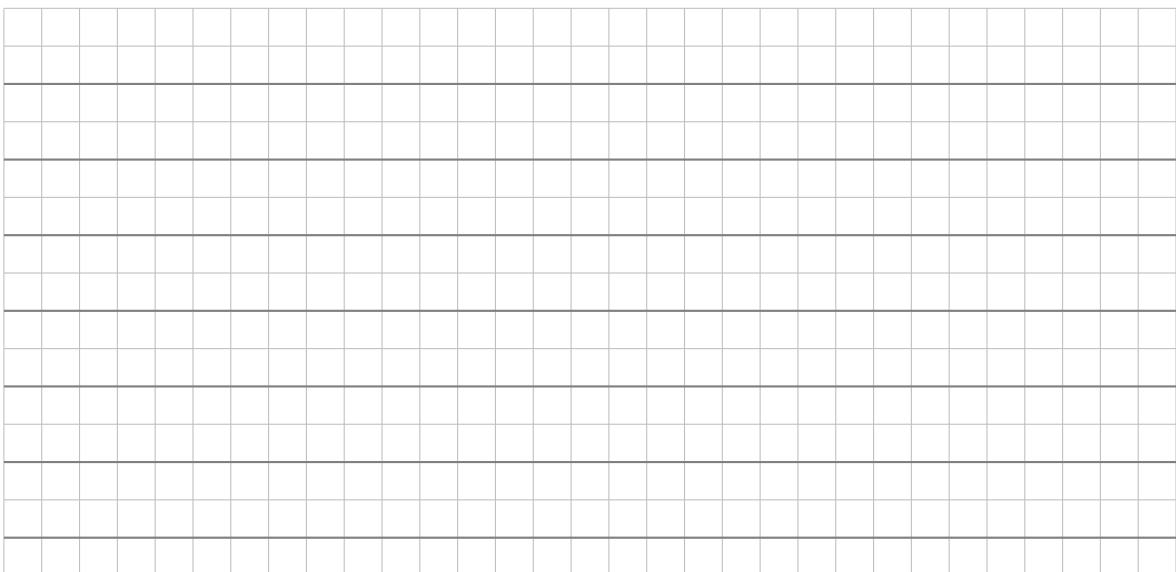
A large grid for numerical solution, consisting of 20 columns and 20 rows of small squares.

Schéma d'Euler explicite



6.1.4 Comparaison des deux méthodes

	Méthode de pénalisation	Méthode d'ajout de forces
Principe	On remplace la contrainte par un ressort de raideur k	On introduit des forces de liaison indéterminées associées à chaque contrainte
Respect des contraintes	Approximative dépendant de la raideur de pénalisation k	Exact
Conditions sur les contraintes	Aucunes	Le système doit être correctement contraint (isostatique)
Paramétrage conforme	Non nécessaire	Fortement recommandé
Intégration numérique	Problématique : grandes raideurs k nécessitent un pas de temps Δt très petit pour la stabilité	Mieux conditionnée numériquement
Complexité de mise en œuvre	Simple à coder, mais délicat à régler (choix de k)	Plus lourd à coder, mais méthode rigoureuse et robuste

6.2 Notion d'hyperstatisme

Définition générale

Un système de points matériels soumis à des contraintes est caractérisé par :

- ses **degrés de liberté cinématiques** N_{ddl} (nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour décrire la configuration),
- le **nombre de contraintes** N_c imposées (conditions géométriques entre les coordonnées).

Système isostatique

Lorsque le nombre de contraintes est exactement celui qui permet de fixer les mouvements parasites et de réduire les degrés de liberté à la valeur attendue, le système est dit **isostatique**.

$$N_c = N_g,$$

où N_c est le nombre de conditions de contrainte et N_g le nombre de conditions nécessaires pour réduire correctement les degrés de liberté.

Il s'obtient à partir du nombre d'équation disponible N_e et du nombre de degrés de liberté du système N_{ddl}

$$N_g = N_e - N_{ddl} = nD - N_{ddl}$$

où n est le nombre de particules et D la dimension du problème.

Systèmes hyperstatiques

On dit qu'un système est **hyperstatique** si le nombre de contraintes imposées est *supérieur* à celui strictement nécessaire pour définir les degrés de liberté. Autrement dit, certaines contraintes deviennent *redondantes* :

$$N_c > N_g,$$

On appelle degrés d'hyperstatisme h

$$h = N_c - N_g$$

6.3 Paramétrages conformes dans un système de points matériels

Définition

Un paramétrage est dit **conforme** lorsque :

- Les variables q_i décrivent toutes les configurations possibles du système sous contraintes, *sans contradiction*.
- Les équations de contrainte sont automatiquement satisfaites par la définition même des coordonnées généralisées.
- Chaque déplacement virtuel δq_i correspond exactement à un déplacement virtuel admissible du système (c'est-à-dire compatible avec les contraintes).

En d'autres termes, un paramétrage conforme garantit que l'on travaille directement dans l'« espace des contraintes », sans avoir besoin d'introduire explicitement les forces de liaison dans l'analyse dynamique.

Intérêt du paramétrage conforme

- **Réduction de la complexité** : au lieu de gérer $3N$ coordonnées et k contraintes, on travaille avec seulement $n = 3N - k$ coordonnées indépendantes.
- **Élimination des réactions**

Exemples 2D



Exemples 3D



6.4 Principe des puissances virtuelles

6.4.1 Énoncé du principe

Le **principe des puissances virtuelles** affirme que, pour tout champs de vitesse virtuel,

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_{\rightarrow i} \cdot \delta \vec{\mathbf{V}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{a}}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \delta \vec{\mathbf{V}}_i.$$

Autrement dit, la *puissance virtuelle des forces extérieures* est égale à la *puissance virtuelle des forces d'inertie*.

6.4.2 Intérêt pour un système contraint

Lorsqu'on utilise un champs de vitesses virtuelles $\delta \vec{\mathbf{V}}_i$ compatibles avec les forces $\vec{\mathbf{R}}_i$ associées aux contraintes, en utilisant un paramétrage conforme, les réactions de liaison ne font pas de travail virtuel :

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{R}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{V}}_i = 0.$$

Ainsi, elles n'apparaissent pas explicitement dans le principe, ce qui simplifie grandement l'écriture des équations du mouvement.

Formulation dans le système de coordonnées conforme

Si l'on introduit un **paramétrage conforme** (q_1, \dots, q_n) décrivant la configuration, les déplacements virtuels s'écrivent :

$$\delta \vec{\mathbf{V}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{V}}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

En reportant dans le principe, on obtient :

$$\sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j, \quad Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{F}}_{\rightarrow i} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{V}}_i}{\partial q_j}$$

où T est l'énergie cinétique du système et Q_j les *forces généralisées*.

Comme les \dot{q}_j sont indépendants, on retrouve les **équations de Lagrange** :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

6.5 Exemples

Bille sur railles



Haltère



Double pendule



Deuxième partie
Cinématique du solide

CINÉMATIQUE DU SOLIDE - ESPACE DES ÉTATS D'UN SOLIDE INDÉFORMABLE

Dans le cas d'un solide indéformable, les distances entre tous les points du solide restent constantes au cours du temps. Cette contrainte géométrique réduit considérablement la complexité du problème. Ainsi, le mouvement d'un solide indéformable peut être décrit entièrement à partir de :

- la position d'un point de référence définie par **3 coordonnées de translation**,
- l'orientation du solide dans l'espace, décrite par **3 coordonnées de rotation**.

Cette réduction fondamentale — de l'infinité de points à seulement six paramètres indépendants — est à la base de toute la **cinématique du solide**.

7.1 Repère local

Comme en CAO, pour définir la position de tous les points d'un solide S_i , on lui associe un repère locale (ou repère pièce)

$$\mathcal{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$$

où O_i est l'origine du repère et $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ constitue une base orthonormée directe.

Ainsi, à chaque instant, la position d'un point $M \in S_i$ est donnée par :

$$\left[\overrightarrow{O_i M} \right]_{\mathcal{B}_i} = X_M \vec{x}_i + Y_M \vec{y}_i + Z_M \vec{z}_i = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_i}$$

où (X_M, Y_M, Z_M) sont les coordonnées de M dans le repère local. Puisque le solide est indéformable, ces coordonnées restent constantes : elles ne changent pas au cours du temps.

Toute la problématique de la **cinématique du solide** consiste alors à décrire le mouvement du repère locale $\mathcal{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ au cours du temps par rapport à repère global choisi $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Remarque 7.1 *Le repère local n'est pas unique. Dans la pratique, on le choisit de manière à **simplifier la modélisation et les calculs**, par exemple en plaçant son origine au centre de gravité ou sur un axe de symétrie du solide.*

7.2 Espace de configuration

Pour définir la position du repère pièce $\mathcal{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ par rapport au repère global $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, il faut définir :

- la position de l'origine $\overrightarrow{O_0O_i}$ (3 ddl de translation)

$$\overrightarrow{O_0O_i} = \vec{p}_i$$

- l'orientation de la base $\mathcal{B}_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ par rapport à la base globale $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ (3 ddl de rotation)

En effet, dans la position de n'importe quel point $M \in S_i$ est entièrement définie dans le repère absolue \mathcal{R}_i par la relation :

$$\overrightarrow{O_0M} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \vec{p}_i \Big|_{\mathcal{B}_0} + \mathbf{R}_{i/0} \cdot \overrightarrow{O_iM} \Big|_{\mathcal{B}_i}$$

où la matrice $\mathbf{R}_{i/0}$ représente la **rotation de la base local \mathcal{B}_i** par rapport à la base fixe \mathcal{B}_0 .

Matrice de rotation

La nouveauté par rapport à la cinématique du point est la définition de l'orientation d'une base par rapport à une autre. L'outil mathématique dédié à ce problème est la matrice de rotation $\mathbf{R}_{i/0}$ vérifiant :

$$\mathbf{R}_{i/0} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 & \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 & \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0 & \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_0 & \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Conserve : angles, longueurs et orientation.

Inverse :

$$\mathbf{R}_{0/i} = \mathbf{R}_{i/0}^{-1} = \mathbf{R}_{i/0}^T$$

Composition :

$$\mathbf{R}_{2/0} = \mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0}$$

Non-commutative :

$$\mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0} \neq \mathbf{R}_{1/0} \cdot \mathbf{R}_{2/1}$$

Utilisation de la matrice de rotation

- Définir l'orientation de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R}_0
- Changer la base d'un vecteur \vec{U}

$$\vec{U} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{R}_{1/0} \cdot \vec{U} \Big|_{\mathcal{B}_1}$$

— Changer la base d'une matrice A

$$A|_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{R}_{1/0} \cdot A|_{\mathcal{B}_1} \cdot \mathbf{R}_{1/0}$$

— Trouver la position d'un point M après une rotation d'axe (O, \vec{k}) d'angle θ

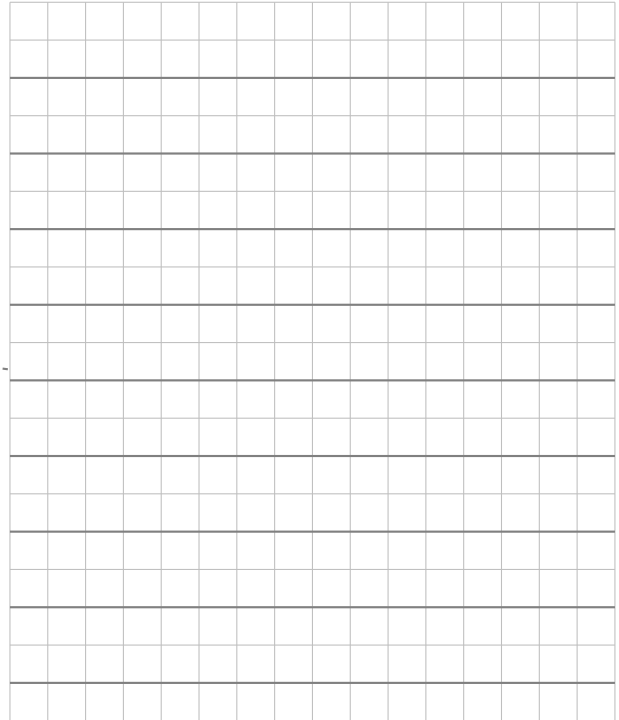
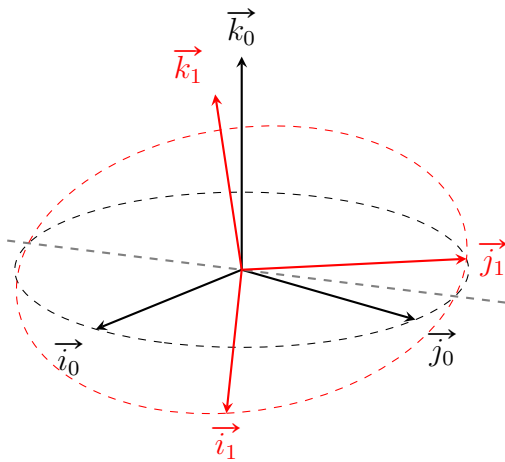
$$\overrightarrow{OM'} = \mathbf{R}_{\vec{k}}(\theta) \cdot \overrightarrow{OM}$$

où $\mathbf{R}_{\vec{k}}(\theta)$ est la matrice de la rotation d'axe d'angle θ

Exemple 1 : Matrice de rotation élémentaires



Exemple 2 : Angles d'Euler $\mathbf{R}(1/0) = \mathbf{R}_Z(\phi) \mathbf{R}_Y(\theta) \mathbf{R}_Z(\psi)$



avec

- ψ angle de précession
- θ angle de nutation
- ϕ angle de rotation propre ou spin

Matrice de transformation $\mathbf{T}(1/0)$

Pour pouvoir utiliser le produit matricielle pour décrire le mouvement d'un solide rigide, on introduit les coordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} \overline{OM} \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

et la matrice de transformation

$$\mathbf{T}_{1/0} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1/0} & \vec{p}|_{\mathcal{R}_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & p_X \\ & p_Y \\ & p_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

- Conserve les angles, les longueurs et l'orientation
- Inverse :

$$\mathbf{T}_{0/1} = \mathbf{T}_{1/0}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1/0}^T & -\mathbf{R}_{1/0}^T \cdot \vec{p}|_{\mathcal{R}_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Composition : $\mathbf{T}_{2/0} = \mathbf{T}_{2/1} \cdot \mathbf{T}_{1/0}$
- Non-commutative : $\mathbf{T}_{2/1} \cdot \mathbf{T}_{1/0} \neq \mathbf{T}_{1/0} \cdot \mathbf{T}_{2/1}$

Différents choix possibles pour l'espace de configuration

L'espace de configuration d'un solide S_i dans l'espace peut être défini de plusieurs manières équivalentes, selon le type de paramétrage choisi pour décrire sa position et son orientation.

- Paramétrage par translation et angles d'Euler :

$$\mathcal{Q} = \{p_X, p_Y, p_Z, \psi, \theta, \varphi\}$$

où (p_X, p_Y, p_Z) représentent les coordonnées de l'origine du repère lié au solide S_i , et (ψ, θ, φ) sont les trois angles d'Euler définissant son orientation.

- Paramétrage par translation et matrice de rotation :

$$\mathcal{Q} = \{p_X, p_Y, p_Z, \mathbf{R}_{i/0}\}$$

où $R_{i/0}$ est la matrice de rotation exprimant l'orientation du repère local \mathcal{R}_i par rapport au repère de référence \mathcal{R}_0 .

- Paramétrage par matrice de transformation homogène :

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{T}_{i/0}\}$$

avec $\mathbf{T}_{i/0}$ la **matrice de transformation homogène** regroupant à la fois la translation et la rotation :

$$\mathbf{T}_{i/0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i/0} & \vec{\mathbf{P}}_{i/0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque 7.2 Le choix du paramétrage de l'espace de configuration dépend du contexte et vise avant tout à **simplifier les calculs**.

- Dans les modèles analytiques ou théoriques, le paramétrage par **angles d'Euler** est souvent utilisé car il relie directement la géométrie à la cinématique.
- Dans les simulations numériques, les logiciels de **CAO**, de **robotique** ou d'**animation 3D**, on privilégie généralement la **matrice de transformation homogène** $\mathbf{T}_{i/0}$, plus adaptée aux opérations matricielles (composition de mouvements, transformations hiérarchiques, etc.).

Enfin, le choix du paramétrage doit être **conforme aux contraintes géométriques** imposées par les liaisons entre pièces : il doit refléter fidèlement les degrés de liberté effectivement permis par le mécanisme étudié.

7.3 Espace des états d'un solide

L'espace des états $T\mathcal{Q}$ contient toute l'information nécessaire pour décrire le mouvement instantané d'un solide.

- Paramétrage à partir des coordonnées généralisées :

$$T\mathcal{Q} = \{p_X, p_Y, p_Z, \psi, \theta, \varphi, \dot{p}_X, \dot{p}_Y, \dot{p}_Z, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\}$$

où (p_X, p_Y, p_Z) représentent les coordonnées de l'origine du repère lié au solide S_i , et (ψ, θ, φ) sont les trois angles d'Euler définissant son orientation.

- Paramétrage par translation et matrice de rotation :

$$T\mathcal{Q} = \{\overrightarrow{OO_i}, \mathbf{R}_{i/0}, \vec{V}(O_i/0), \vec{\Omega}(i/0)\}$$

où :

- $\overrightarrow{OO_i}$ est le vecteur position de l'origine du repère lié au solide S_i ,
- $\mathbf{R}_{i/0}$ est la matrice de rotation du repère du solide S_i ,
- $\vec{V}(O_i/0)$ la vitesse de son origine O_i par rapport au repère globale S_0 ,
- $\vec{\Omega}(i/0)$ le vecteur rotation instantanée du solide S_i par rapport au repère globale.

- Paramétrage compact par matrice de transformation homogène et twist :

$$T\mathcal{Q} = \{\mathbf{T}_{i/0}, \mathcal{V}_{i/0}\}$$

avec $\mathbf{T}_{i/0}$ la **matrice de transformation homogène** regroupant à la fois la translation et la rotation :

$$\mathbf{T}_{i/0} = \begin{bmatrix} & & p_X & \\ & \mathbf{R}_{i/0} & p_Y & \\ & & p_Z & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}_{i/0} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y & V_X \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & V_Y \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & V_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

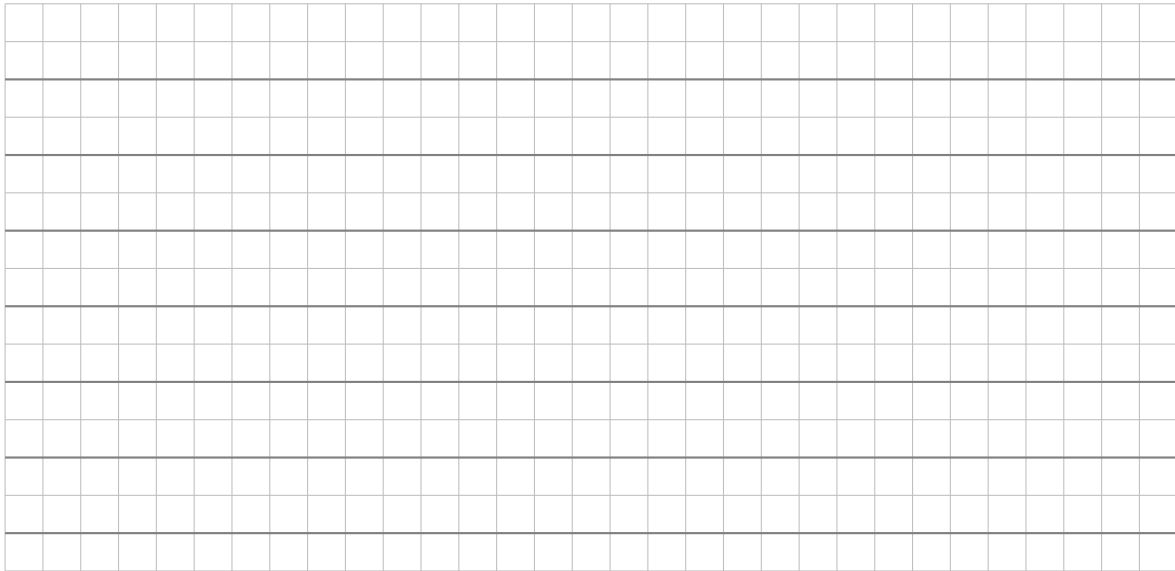
où :

- p_X, p_Y, p_Z sont les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OO_i}$ dans le repère global,
- $\mathbf{R}_{i/0}$ est la matrice de rotation du repère du solide S_i ,
- $\mathcal{V}_{i/0}$ est la matrice de twist,
- $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ sont les coordonnées du vecteur taux de rotation instantanée $\vec{\Omega}(i/0)$ dans le repère globale,
- V_X, V_Y, V_Z sont les coordonnées du vecteur vitesse de O_i par rapport au repère globale S_0 $\vec{V}(O_i/0)$,

7.4 Vecteur taux de rotation

Le vecteur de taux de rotation $\vec{\Omega}(i/0)$, aussi appelé vecteur de vitesse angulaire, est une notion centrale en cinématique du solide. Il permet de décrire de façon simple et intuitive la manière dont un solide change d'orientation au cours du temps. Ce vecteur indique à la fois l'axe instantané autour duquel le solide tourne et la vitesse à laquelle cette rotation s'effectue. Sa direction correspond à celle de l'axe de rotation, son sens suit la règle du tire-bouchon, et sa norme représente la vitesse angulaire, exprimée en radians par seconde.

Exemple 3 : Rotation élémentaires



Exemple 4 : Angles d'Euler $\mathbf{R}(1/0) = \mathbf{R}_Z(\phi) \mathbf{R}_Y(\theta) \mathbf{R}_Z(\psi)$

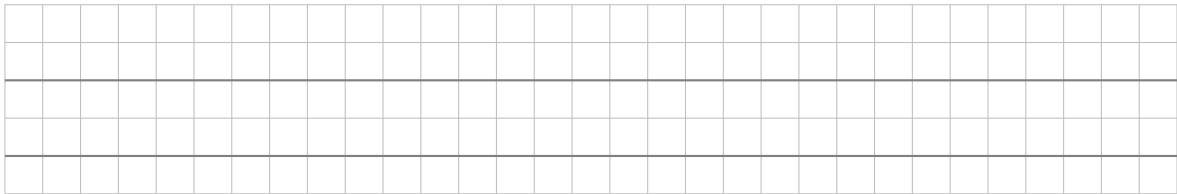
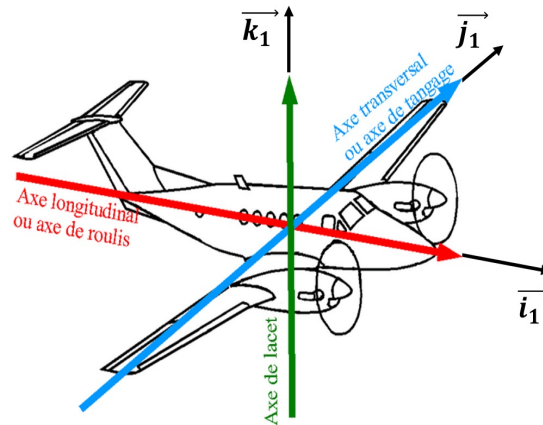


Exemple 5 : Angles de Cardan

Lacet : α

Tangage : β

Roulis : γ



Utilités

Le vecteur taux de rotation est fondamentale en cinématique et dynamique, car il sert à déterminer la vitesse en tout point d'un solide et à dériver les vecteurs.

Formule de Varignon La formule de Varignon permet de calculer le champ de vecteurs vitesse relative d'un solide S_i par rapport à un autre solide S_0

$$\vec{V}(B; i/0) = \vec{V}(A; i/0) + \overline{\mathbf{BA}} \wedge \vec{\Omega}(i/0)$$

où $\vec{\Omega}(2/1)$ est le vecteur taux de rotation de 2 par rapport à la base 1.

Formule de Bour La formule de Bour, ou formule de la base mobile, permet de relier la dérivée d'un vecteur dans la \mathcal{B}_1 liée au solide 1 à celle dans la base \mathcal{B}_2 liée au solide 2.

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{v}$$

où $\vec{\Omega}(2/1)$ est le vecteur taux de rotation de 2 par rapport à la base 1.

7.5 Mise à jour de l'espace de configuration à partir de l'espace des états (Hors programme)

Principe général

L'espace de configuration \mathcal{Q} décrit la position et l'orientation du solide S_i , tandis que l'espace des états $T\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}, \dot{\mathcal{Q}}\}$ inclut également les vitesses de translation et de rotation.

L'évolution du système dans le temps repose sur une intégration temporelle des vitesses :

$$\mathcal{Q}(t + \Delta t) = \mathcal{Q}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\mathcal{Q}}(\tau) d\tau$$

Dans la pratique, cette intégration est effectuée numériquement, selon différents schémas d'approximation

Mise à jour de la position (translation)

La position de l'origine du repère lié au solide évolue selon :

$$\overline{OO}_i(t + \Delta t) = \overline{OO}_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{V}}(O_i/0) d\tau$$

Mise à jour de l'orientation (rotation)

Pour la mise à jour de l'orientation, on utilise les **quaternions unitaires**, $q(t)$, qui offrent une manière stable et compacte de représenter les rotations tridimensionnelles. Contrairement aux angles d'Euler, ils ne présentent pas de singularité (effet de *gimbal lock*), et leur intégration temporelle conserve automatiquement la normalisation, donc $\det(R) = 1$.

Définition d'un quaternion unitaire Un quaternion unitaire q associé à une rotation d'un angle θ autour d'un axe unitaire $\overline{\mathbf{u}} = (u_x, u_y, u_z)$ est défini par :

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ u_x \sin \frac{\theta}{2} \\ u_y \sin \frac{\theta}{2} \\ u_z \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \overline{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix}$$

où :

- q_0 est la **partie scalaire**,
- $\overline{\mathbf{q}}_v = [q_1, q_2, q_3]^\top$ est la **partie vectorielle**.

Le quaternion q est unitaire par construction car quelque soit $\vec{\mathbf{u}}$ et θ la norme de $\|q\| = 1$

$$\begin{aligned}\|q\| &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1\end{aligned}$$

Matrice de rotation associée à un quaternion unitaire, $q \rightarrow \mathbf{R}$ Le quaternion q définit la matrice de rotation correspondante $\mathbf{R}(q)$ par :

$$\mathbf{R}(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}$$

Quaternion unitaire associé à une matrice de rotation, $\mathbf{R} \rightarrow q$

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\ q_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4q_0} \\ q_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4q_0} \\ q_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4q_0} \end{bmatrix}$$

Algorithme numérique

1. Connaître à l'instant t :

$$\mathbf{R}_{i/0}(t), \vec{\mathbf{\Omega}}(i/0)$$

2. Calculer le quaternion unitaire à l'instant

$$\mathbf{R}_{i/0}(t) \rightarrow q(t)$$

3. Calculer le quaternion incrémental :

$$\delta q = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega}{\Delta} t_2 \\ \frac{\vec{\mathbf{\Omega}}(i/0)}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \end{bmatrix}$$

où $\omega = \|\vec{\mathbf{\Omega}}(i/0)\|$

4. Mettre à jour :

$$q(t + \Delta t) = \delta q \otimes q(t)$$

où \otimes désigne le produit quaternionique :

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_0q_0 - \vec{\mathbf{p}}_v \cdot \vec{\mathbf{q}}_v \\ p_0\vec{\mathbf{q}}_v + q_0\vec{\mathbf{p}}_v + \vec{\mathbf{p}}_v \wedge \vec{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix}$$

5. Renormaliser :

$$q(t + \Delta t) \leftarrow \frac{q(t + \Delta t)}{\|q(t + \Delta t)\|}$$

6. Reconstruire la matrice à partir du quaternion unitaire à l'instant $t + \Delta t$:

$$q(t + \Delta t) \rightarrow \mathbf{R}_{i/0}(t + \Delta t)$$

Avantages des quaternions

- Pas de singularité (contrairement aux angles d'Euler).
- Mise à jour numérique stable et rapide.
- Conservation automatique de la contrainte $\det(\mathbf{R}_{i/0}) = 1$.
- Opérations de composition de rotations simples via le produit quaternionique.

Remarque 7.3 *Les quaternions sont aujourd'hui la représentation standard des rotations dans les logiciels de robotique, CAO/FAO, animation 3D et simulation dynamique, notamment pour leur stabilité numérique et leur efficacité dans la mise à jour de la configuration des solides rigides.*

7.6 Champs de vecteurs vitesse relative d'un solide S_1 par rapport à un solide S_0

La vitesse relative dans le mouvement S_1 par rapport S_0 correspond à la vitesse du point M , considéré comme fixe dans le repère liée à 1, dans son mouvement par rapport à S_0 . Elle a pour expression :

$$\vec{V}(M; 1/0) = \vec{V}(M/1) - \vec{V}(M/0)$$

Formule de Varignon

La vitesse relative dans le mouvement 1 par rapport 0 peut être déterminée en tous points M de l'espace à partir de l'espace d'état, en utilisant le formule de Varignon :

$$\vec{V}(M; 1/0) = \vec{V}(O_1; 1/0) + \overrightarrow{MO_1} \wedge \vec{\Omega}(1/0)$$

avec O_1 l'origine de S_1 .

Dans la pratique, une telle relation permet de déterminer la vitesse d'un point dont le mouvement est complexe en considérant une suite de référentiels successifs, chacun en mouvement "simple" les uns par rapport aux autres.

Démonstration Considérons deux points matériels M et O_1 appartenant au solide indéformable S_1 . La condition d'indéformabilité impose que la distance O_1M reste constante au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} \left(\|\overrightarrow{O_1M}\|^2 \right) = 0.$$

En développant, on obtient :

$$2 \overrightarrow{O_1M} \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = 0 \implies \overrightarrow{O_1M} \cdot \left(\vec{V}(M/\mathcal{R}_g) - \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_g) \right) = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\vec{V}(M/\mathcal{R}_g) - \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_g)$ est toujours orthogonale à $\overline{O_1M}$. Tout vecteur orthogonal à $\overline{O_1M}$ peut s'écrire comme un produit vectoriel avec $\overline{O_1M}$, donc il existe un vecteur $\vec{\Omega}(1/\mathcal{R}_g)$ tel que :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_g) - \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_g) = \vec{\Omega}(1/\mathcal{R}_g) \wedge \overline{O_1M}.$$

Cette formule peut se réécrire pour retrouver la formule de Varignon :

$$\vec{V}(M; 1/\mathcal{R}_g) = \vec{V}(O_1; 1/\mathcal{R}_g) + \overline{MO_1} \wedge \vec{\Omega}(1/\mathcal{R}_g).$$

Nous venons de démontrer l'existence d'un vecteur taux rotation, il reste maintenant à pour son unicité et son indépendance du point M .

Unicité et indépendance de $\vec{\Omega}$. Considérons maintenant trois points distincts non alignés O_1 , M et N du solide. La distance MN étant également constante, on a :

$$\frac{d}{dt} (\|\overline{MN}\|^2) = 0 \implies \overline{MN} \cdot (\vec{V}(N/\mathcal{R}_g) - \vec{V}(M/\mathcal{R}_g)) = 0.$$

De même que précédemment, on obtient :

$$\overline{MN} \cdot \left[(\vec{\Omega}_N \wedge \overline{O_1N}) - (\vec{\Omega}_M \wedge \overline{O_1M}) \right] = 0.$$

En supposant que le vecteur $\vec{\Omega}_M$ dépend du point considéré. En développant et en réarrangeant :

$$(\vec{\Omega}_N - \vec{\Omega}_M) \cdot (\overline{O_1M} \wedge \overline{O_1N}) = 0.$$

Or, les points O_1 , M et N n'étant pas alignés, le vecteur $\overline{O_1M} \wedge \overline{O_1N} \neq \vec{0}$ est non nul, ce qui impose :

$$\vec{\Omega}_N = \vec{\Omega}_M. \quad (\text{CQFD})$$

Ainsi, le vecteur $\vec{\Omega}$ est le même pour tous les points du solide S_1 : il s'agit du vecteur taux de rotation instantanée du solide par rapport au référentiel choisi que l'on notera $\vec{\Omega}(1/\mathcal{R}_g)$.

Propriété d'équiprojectivité

La propriété d'équiprojectivité est une caractéristique fondamentale du mouvement d'un solide indéformable. Elle énonce que, pour un même solide S_1 en mouvement par rapport à un autre S_0 , les vitesses de deux points quelconques A et M ont des projections égales sur la droite qui les relie :

$$\vec{V}(A, 1/0) \cdot \overline{AM} = \vec{V}(M, 1/0) \cdot \overline{AM}$$

Autrement dit, dans un solide rigide, la composante des vitesses selon la direction du segment AM est identique pour tous les points du solide. Cette propriété traduit le fait que la distance entre deux points d'un solide indéformable reste constante au cours du mouvement.

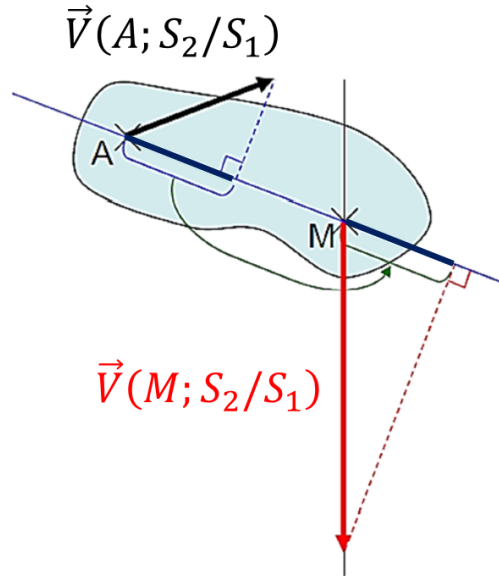


FIGURE 7.1 – Illustration de la propriété d'équiprojectivité entre deux points A et M d'un solide rigide.

Démonstration À partir de la relation fondamentale du mouvement d'un solide :

$$\vec{V}(M, 1/0) = \vec{V}(A, 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{\mathbf{AM}}$$

On projette cette relation sur la direction $\overline{\mathbf{AM}}$:

$$\vec{V}(M, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} = \vec{V}(A, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} + (\vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{\mathbf{AM}}) \cdot \overline{\mathbf{AM}}$$

Le dernier terme est nul car le produit mixte d'un vecteur avec lui-même est nul :

$$(\vec{\Omega} \wedge \overline{\mathbf{AM}}) \cdot \overline{\mathbf{AM}} = 0$$

D'où la propriété :

$$\vec{V}(A, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} = \vec{V}(M, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} \quad (\text{CQFD})$$

7.7 Composition de mouvement

En cinématique, il est possible et utile de composer les mouvements, lorsque plusieurs solides sont en liaison les uns avec les autres.

Toutes les règles de composition de mouvement sont données pour le cas deux solides S_1 et S_2 , elles s'étendent naturellement et sans difficulté au cas de N solides.

Composition des vecteurs placements : relation de Chasles

$$\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2}$$

Composition des matrices de rotation

$$\mathbf{R}_{2/0} = \mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0}$$

Composition des matrices de transformation homogène

$$\mathbf{T}_{2/0} = \mathbf{T}_{2/1} \cdot \mathbf{T}_{1/0}$$

Composition des vitesses

Composition des vecteurs vitesse de rotation

$$\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0)$$

Composition des vecteurs vitesses relatives

$$\vec{V}(A; 2/0) = \vec{V}(A; 2/1) + \vec{V}(A; 1/0)$$

Cette expression est valable en tous points A de l'espace à condition que les trois vitesses relatives soient exprimées au même point.

Composition des accélérations

Soit un référentiel $\mathcal{R}_1(O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. L'expression de l'accélération absolue du point A par rapport du référentiel galiléen se décompose en trois terme

$$\vec{a}(A/\mathcal{R}_g) = \vec{a}(A/\mathcal{R}_1) + \vec{a}_{ent}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) + \vec{a}_{Cor}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g)$$

où on a

L'accélération absolue : L'accélération du point A dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g

$$\vec{a}(A/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OA}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_g}$$

L'accélération relative : L'accélération du point A dans le référentiel mobile \mathcal{R}_1

$$\vec{a}(A/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{O_1A}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_1}$$

L'accélération d'entraînement de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R}_g : $\vec{\alpha}_{ent}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g)$

$$\vec{\alpha}_{ent}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) = \vec{\alpha}(O_1/\mathcal{R}_g) + \left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \overline{O_1\vec{A}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) \wedge \overline{O_1\vec{A}} \right)$$

L'accélération d'entraînement traduit l'effet du mouvement de référentiel mobile \mathcal{R}_1 d'origine O_1 sur le point observé A : elle représente les accélérations que subirait le point A s'il était immobile dans \mathcal{R}_1 , c'est-à-dire celles dues à la translation et à la rotation de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R}_g .

L'accélération de Coriolis qui est due à la rotation du solide S_1 par rapport au solide S_0

$$\vec{\alpha}_{cor}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_1)$$

L'accélération de Coriolis traduit l'effet de la rotation du repère \mathcal{R}_1 sur le mouvement relatif du point A à l'intérieur de ce repère : elle apparaît uniquement lorsque le repère \mathcal{R}_1 tourne par rapport à \mathcal{R}_g et que le point A se déplace dans \mathcal{R}_1 .

Remarque 7.4 La formule de l'accélération d'entraînement est utile pour déterminer l'accélération de tout point $A \in S$ à partir de l'accélération de l'origine O_S du repère lié à S

$$\vec{\alpha}(A/\mathcal{R}_g) = \vec{\alpha}_{ent}(A; S/\mathcal{R}_g)$$

car l'accélération relative et l'accélération de Coriolis sont nulles si $\vec{V}(A/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$, donc on a

$$\vec{\alpha}(A/\mathcal{R}_g) = \vec{\alpha}(O_S/\mathcal{R}_g) + \vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \overline{O_S\vec{A}} + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \left(\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \overline{O_S\vec{A}} \right)$$

où

- Le premier terme $\vec{\alpha}(O_S/\mathcal{R}_g)$ représente l'accélération de translation du solide, commune à tous ses points.
- Le second terme $\vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \overline{O_S\vec{A}}$ correspond à l'accélération tangentielle, due à la variation du vecteur de rotation $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)$; avec $\vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g)$ le vecteur d'accélération angulaire du solide S par rapport au référentiel galiléen R_g

$$\vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_S = \left. \frac{d\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g}$$

- le troisième terme $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \left(\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \overline{O_S\vec{A}} \right)$ traduit l'accélération normale (ou centripète), liée au changement de direction de la vitesse du point A lors de la rotation du solide S .

MODÉLISATION DES SYSTÈMES DE SOLIDES INDÉFORMABLES

Dans des mécanismes les mouvements relatifs entre solides sont limités par l'existence de liaisons entre les différentes pièces du mécanisme. Ainsi, un système de solides est constitué de deux sous-ensembles :

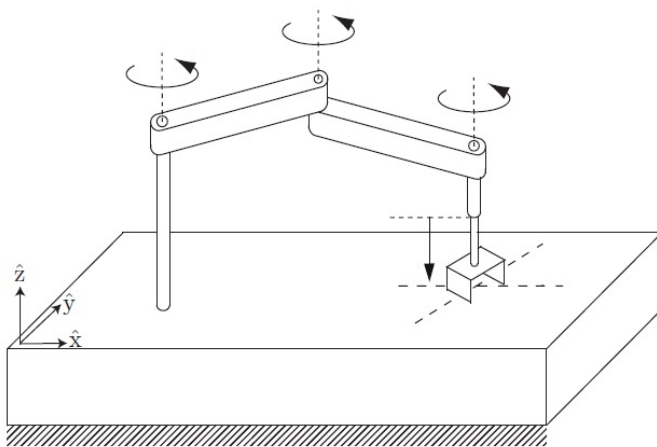
- l'ensemble des solides indéformables ;
- l'ensemble des liaisons entre solides.

Le système de solides pourra donc être représenté par des graphes, dont l'analyse permet de définir l'espace de configuration minimale et par conséquent le paramétrage. Il existe deux types de graphe :

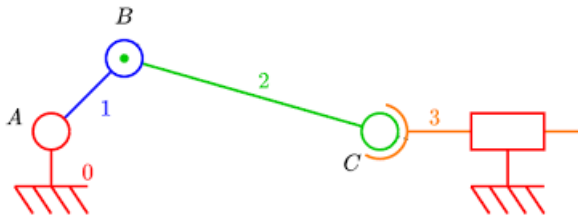
Graphe cinématique : les liaisons constituent les sommets, les solides constituent les arcs.

Graphe de structure : les solides constituent les sommets, les liaisons constituent les arcs.

Exemple 1 : Robot SCARA



Exemple 2 : Système bielle manivelle



Remarque 8.1 *Le graphe de structure est un outil d'analyse performant pour :*

- déterminer la mobilité du système, c'est-à-dire son espace de configuration minimal du système ;
- faire les bilan des actions mécaniques extérieurs (BAME)
- choisir les sous-systèmes à isoler pour appliquer les théorèmes généraux de la dynamique et choisir les projections pertinentes à effectuer.

8.1 Paramétrage des liaisons cinématiques

L'espace de configuration d'un solide dans l'espace est défini par 6 paramètres ou degrés de libertés (ddl) :

- 3 translations
- 3 rotations

Les liaisons cinématiques permettent de bloquer un certain nombre de ces ddl. Autrement dit, se sont des contraintes géométriques ou cinématiques qui diminue la dimension de l'espace de configuration et de l'espace d'état du système.

Degrés de liberté d'une liaison (ddl)

Pour chaque translation libre, nous devons ajouter un paramètre de distance inconnue et pour chaque rotation un paramètre d'angle inconnue.

Pour des raisons pratiques et pour éviter d'exprimer les matrices de rotation, on utilise également le torseur cinématique pour paramétrer une liaison entre deux solides, au travers de paramètres de vitesses et de vitesses angulaires.

Torseur cinématique du solide du S_2 par rapport à S_1 exprimé au point A

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(A; 2/1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, V_{21}, W_{21}) \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

où

- $\vec{\Omega}(2/1)$ est le vecteur taux de rotation de S_2 par rapport à S_1 .
- $\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}$ sont les vitesses angulaire associés aux ddl rotations.

- $\vec{V}(A; 2/1)$ est le vecteur vitesse relative au point A de S_2 par rapport à S_1 .
- U_{21}, V_{21}, W_{21} sont les vitesses associés aux ddl de translations.

Remarque 8.2 *Le choix des indices \circ_{21} permet de préciser que c'est le mouvement de 2 par rapport à 1. Ceci est important pour éviter les erreurs de signes, en outre si on change l'ordre des indices où doit changer le signe de paramètre cinématique :*

$$\dot{\alpha}_{21} = -\dot{\alpha}_{12} \quad \text{et} \quad U_{21} = -U_{12}.$$

Remarque 8.3 *Le choix du point A et de la base de $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ n'est pas unique. Il doit être conforme c'est-à-dire en accord avec les contraintes cinématiques imposées. Un choix judicieux permettra de réduire les calculs.*

Multiplicateurs de Lagrange ou Inconnues statiques (I_s)

Pour bloquer un mouvement, il est nécessaire d'ajouter un multiplicateur de Lagrange ou une inconnue statique. La nature du multiplicateur de Lagrange change en fonction de celle du mouvement bloqué. On utilise :

Une inconnue de force : pour bloquer un ddl de translation (Unité $[N]$).

Une inconnue de couple : pour bloquer un ddl de rotation (Unité $[N.m]$).

On également utilisé un torseur pour représenter les inconnues statiques.

Torseur d'inter-effort S_2 sur le solide S_1 en A

$$\left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A; 2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (L_{21}, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

où

- $\vec{F}(2 \rightarrow 1)$ est la force de contact de S_2 sur S_1 .
- X_{21}, Y_{21}, Z_{21} sont les multiplicateurs de Lagrange permettant de bloquer les ddl de translation.
- $\vec{M}(A; 2 \rightarrow 1)$ est le vecteur moment au point A de S_2 sur S_1 .
- L_{21}, M_{21}, N_{21} sont les multiplicateurs de Lagrange permettant de bloquer les ddl de rotation.

Remarque 8.4 *Le choix du point A et de la base de $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ doit être le même pour celui du torseur cinématique. Il doit donc être par conséquent conforme aux contraintes cinématique et permettre de simplifier les calculs.*

8.2 Inventaires des liaisons mécaniques normalisées

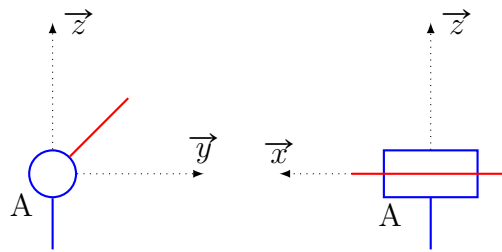
Liaisons élémentaires

L'association deux à deux des surfaces élémentaires permet d'introduire les liaisons parfaites sont réalisées par contact de surface élémentaire (voir Tableau ??). Il est possible de les imposer par une seule contrainte de coïncidence en CAO entre deux entités géométriques élémentaires tels qu'un plan, une ligne et un point.

Liaison élémentaire	Surfaces en contact	ddl	I_s
Appui-plan (AP) de normal \vec{n}	Plan-Plan	3 2T 1R	3
Pivot-glissant (PG) d'axe (O, \vec{x})	Cylindre-Cylindre	2 1T 1R	4
Rotule (R) de centre O	Sphère-Sphère	3 0T 3R	3
Linéaire rectiligne (LR) de normal \vec{n} et de direction \vec{x}	Cylindre-Plan	4 2T 2R	2
Appui-ponctuel (Po) d'axe (A, \vec{n})	Sphère - Plan	5 2T 3R	1
Linéaire-annulaire (LA) d'axe (O, \vec{x})	Sphère-Cylindre	4 1T 3R	1

TABLE 8.1 – Liste des liaisons élémentaires.

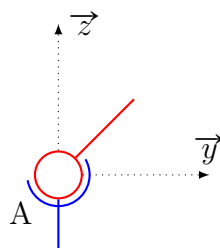
Liaison pivot-glissant (2 ddl, $I_s = 4$)



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_{21}, 0, 0) \\ (U_{21}, 0, 0) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} (0, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}$$

Ces expressions sont valables pour tous les points A appartenant à l'axe (A, \vec{x}) et dans tous les repères orthonormés directs contenant \vec{x} .

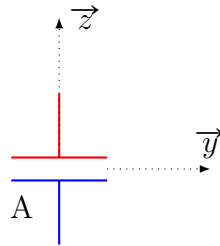
Liaison rotule (3 ddl, $I_s = 3$)



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}_{(-,-,-)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}_{(-,-,-)}$$

Ces expressions sont **valables au centre de liaison rotule A et dans tous les repères orthonormés directs**.

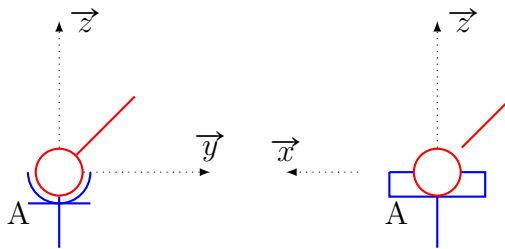
Liaison appui-plan (3 ddl, $I_s = 3$)



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, V_{21}, 0) \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, Z_{21}) \\ (L_{21}, M_{21}, 0) \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z})}$$

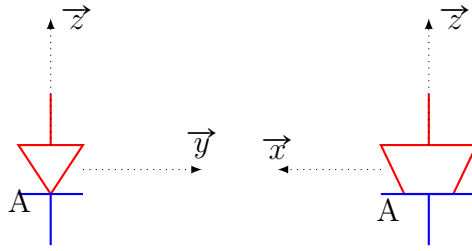
Ces expressions sont **valables pour tous les points A de l'espace et dans tous les repères orthonormés directs contenant \vec{z}** .

Liaison linéaire annulaire (4 ddl, $I_s = 2$)



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, 0, 0) \end{array} \right\}_{(\vec{x},-,-)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} (0, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}_{(\vec{x},-,-)}$$

Ces expressions sont **valables pour tous les points A appartenant à l'axe (A, \vec{x}) et dans tous les repères orthonormés directs contenant \vec{x}** .

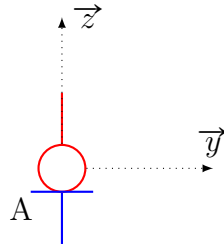


Liaison linéaire rectiligne (4 ddl, $I_s = 2$)

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, 0, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, V_{21}, 0) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} (0, 0, Z_{21}) \\ (0, M_{21}, 0) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables pour tous les points A appartenant à l'axe (A, \vec{x}) et dans l'unique repère orthonormés directs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ liée au solide contenant la ligne de contact, ici le solide supérieur.**

Liaison appui-pontuel (5 ddl, $I_s = 1$)



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, V_{21}, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, \vec{z})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} (0, 0, Z_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables pour tous les points A appartenant à l'axe (A, \vec{z}) et dans tous les repères orthonormés directs contenant \vec{z} .**

Liaisons composées

Les liaisons élémentaires offrent un premier choix mais ne couvrent que 6 possibilités. L'imagination peut conduire vers d'autres solutions obtenues en combinant les liaisons élémentaires. L'association de liaisons élémentaires conduit aux liaisons composées.

Il existe deux manières de combiner les liaisons pour obtenir de nouvelles liaisons :

Liaisons en série : on introduit une solide intermédiaire S_3 entre le solide S_1 et le solide S_2 . Pour déterminer le paramétrage de la liaison équivalente, c'est-à-dire les torseurs cinématiques et les torseurs inter-efforts de la liaison équivalente, on utilise

Approche cinématique (Composition de mouvement)

$$\left\{ \mathcal{V}^{eq}(2/1) \right\}_A = \left\{ \mathcal{V}(2/3) \right\}_A + \left\{ \mathcal{V}(3/1) \right\}_A$$

Approche statique (Équilibre de S_3)

$$\left\{ (2 \rightarrow 1)^{eq} \right\}_A = \left\{ 2 \rightarrow 3 \right\}_A = \left\{ 3 \rightarrow 1 \right\}_A$$

Liaisons en parallèles : on utilise plusieurs liaisons $L1$ et $L2$ entre les solide S_1 et S_2 . Pour déterminer le paramétrage de la liaison équivalente on utilise

Approche cinématique (Fermeture cinématique)

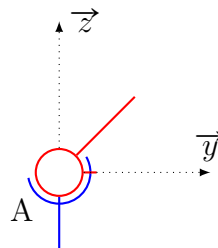
$$\left\{ \mathcal{V}^{eq}(2/1) \right\}_A = \left\{ \mathcal{V}^{L1}(2/1) \right\}_A = \left\{ \mathcal{V}^{L2}(2/1) \right\}_A$$

Approche statique (Addition des actions mécanique)

$$\left\{ (2 \rightarrow 1)^{eq} \right\}_A = \left\{ (2 \rightarrow 1)^{L1} \right\}_A + \left\{ (2 \rightarrow 1)^{L2} \right\}_A$$

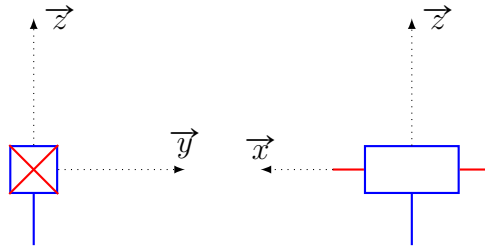
Remarque 8.5 Dans le cas de liaisons en série, l'utilisation de l'approche cinématique est plus simple. A contrario, l'approche statique est plus simple à mettre en oeuvre pour les liaisons en parallèle.

Liaison rotule à doigt (2 ddl, $I_s = 4$) La liaison rotule à doigt est une liaison rotule à laquelle un degrés de liberté a été retiré.



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\}_A = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_{21}, 0, \dot{\gamma}_{21} \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix} \right\}_{(-, \vec{y}, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\}_A = \left\{ \begin{pmatrix} X_{21}, Y_{21}, Z_{21} \\ 0, M_{21}, 0 \end{pmatrix} \right\}_{(-, \vec{y}, -)}$$

Ces expressions sont **valables au centre de liaison A et dans tous les repères orthonormés directs contenant \vec{y} .**

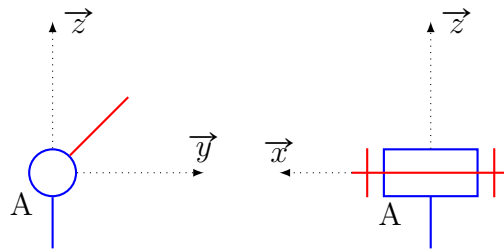


Liaison glissière (1 ddl, $I_s = 5$)

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0) \\ (U_{21}, 0, 0) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (0, Y_{21}, Z_{21}) \\ (L_{21}, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, -, -)}$$

Ces expressions sont **valables en tous points A de l'espace et dans tous les repères orthonormés directs contenant \vec{x} .**

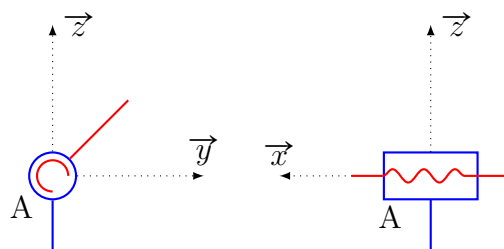
Liaison pivot (1 ddl, $I_s = 5$)



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_{21}, 0, 0) \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, -, -)}$$

Ces expressions sont **valables en tous points de l'axe (A, \vec{x}) et dans tous les repères orthonormés directs contenant \vec{x} .**

Liaison hélicoïdale (1 ddl, $I_s = 5$)



La liaison hélicoïdale est une liaison qui permet une translation ainsi qu'une

rotation. Toutefois elle n'est qu'à un seul degré de liberté car la rotation et la translation sont liées par le pas p de l'hélice. Si la vitesse de rotation est ω_x , alors la vitesse de translation sera égale à $p\omega/2\pi$ pour un filet à droite et $-p\dot{\alpha}_{21}/2\pi$ pour un filet à gauche.

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, 0, 0) \\ (h\dot{\alpha}_{21}, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (-hX_{21}, M_{21}, N_{21}) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}$$

où $h = +\frac{p}{2\pi}$ pour un filet à droite et $h = -\frac{p}{2\pi}$ pour un filet à gauche.

Ces expressions sont **valables en tous points de l'axe (A, \vec{x}) et dans tous les repères orthonormés directs contenant \vec{x} .**

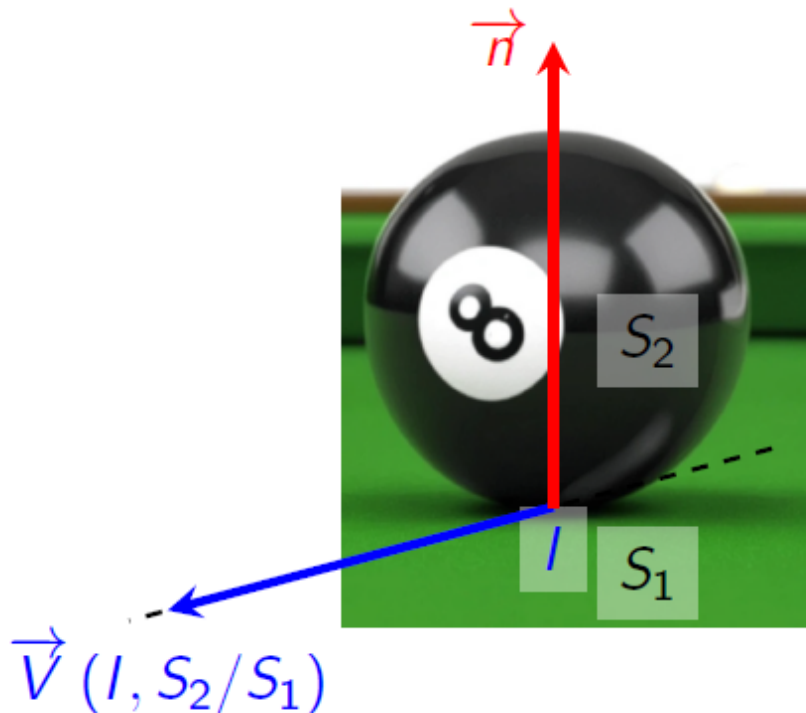
Liaison encastrement (0 ddl, $I_s = 6$) La liaison encastrement est une liaison qui ne permet aucun degré de liberté. Elle est également appelée **liaison complète**. Tout mouvement est interdit.

Les torseurs cinématique et d'inter-effort associés sont de la forme :

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \left\{ \begin{matrix} (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (L_{21}, M_{21}, N_{21}) \end{matrix} \right\}_{(-, -, -)}$$

Ces expressions sont **valables en tous points de l'espace et dans tous les repères orthonormés directs.**

Roulement sans glissement



Dans le cas d'un contact ponctuel en I entre deux solides S_1 et S_2 , on définit :

- **Glissement** — à l'aide de la **vitesse de glissement** $\vec{V}(I; 2/1)$, qui est la vitesse relative du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 :

$$\vec{V}(I; 2/1) = \vec{V}(I/2) - \vec{V}(I/1)$$

Cette vitesse appartient au plan tangent commun à S_1 et S_2 .

- **Pivotement** — à l'aide de la composante du vecteur taux de rotation autour de la normale au plan de contact \vec{n} :

$$\vec{\Omega}^{piv}(2/1) = \left[\vec{\Omega}(2/1) \cdot \vec{n} \right] \vec{n}$$

- **Roulement** — défini par la composante orthogonale au pivotement :

$$\vec{\Omega}^{roul}(2/1) = \vec{\Omega}(2/1) - \vec{\Omega}^{piv}(2/1)$$

Condition de roulement sans glissement :

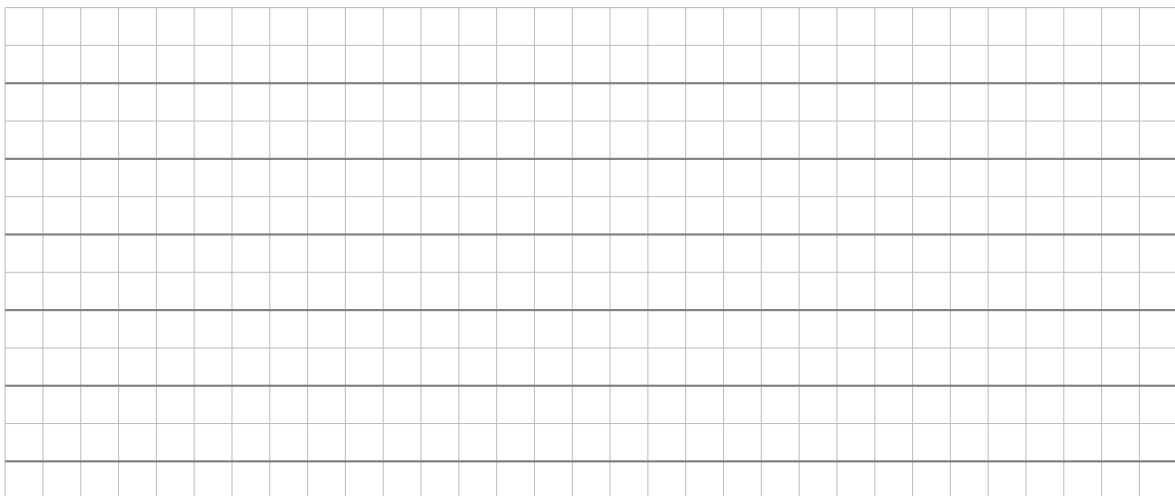
$$\vec{V}(I; 2/1) = \vec{0}.$$

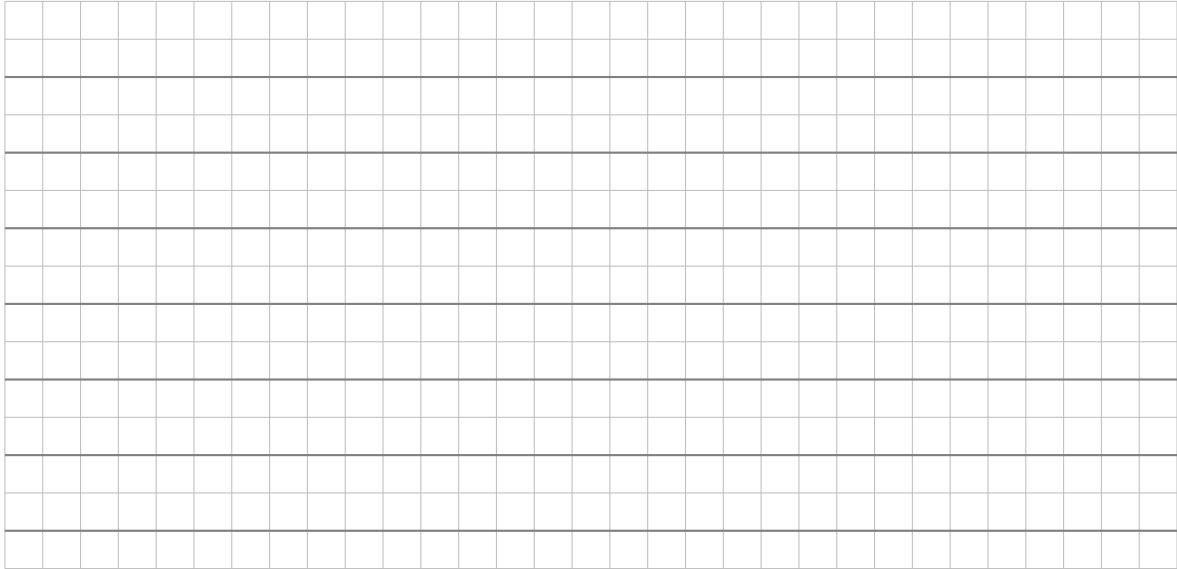
Cette condition est imposée en ajoutant deux forces dans le plan tangent au contact, au torseur d'effort interne de la liaison ponctuelle en I , de normale \vec{n} :

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\}_I = \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, \vec{n})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\}_I = \left\{ \begin{matrix} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, \vec{n})}$$

Ces expressions sont valables au point de contact I et dans tout repère orthonormé direct contenant la normale \vec{n} .

Exemple 3 : Engrenages





Remarque 8.6 Les engrenages sont généralement modélisés par des liaisons appui-ponctuel dans les problèmes plans, et par des liaisons linéaires rectilignes en trois dimensions. Pour parfaire cette modélisation, il est nécessaire d'ajouter une **condition de roulement sans glissement**, c'est-à-dire que la vitesse de glissement entre les roues dentées est nulle :

$$\vec{V}(I; 2/1) = \vec{0}$$

où I est le point de contact des deux roues dentées.

Remarque 8.7 Pour les transmissions par adhérence — de type poulie-courroie, roues de friction ou contact pneu-route — la condition de roulement sans glissement reste valable tant que les efforts dans le plan tangent demeurent inférieurs à la force limite d'adhérence :

$$\|\vec{F}_f\| = \mu_s |Z_{21}|,$$

c'est-à-dire tant que :

$$\|\vec{F}_t\| = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2} < \|\vec{F}_f\|.$$

Cas bidimensionnel

Dans le cas d'un problème bidimensionnel, trois degrés de liberté suffisent pour repérer deux solides l'un par rapport à l'autre :

- deux translations dans le plan ;
- une rotation d'axe orthogonal au plan.

Ces degrés de liberté sont identiques à ceux d'une liaison *appui-plan*.

Il existe quatre liaisons normalisées dans le plan :

Liaison appui-ponctuel (2 ddl, $I_s = 1$) d'axe (A, \vec{x}) , avec \vec{x} situé dans le plan :

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \omega_{21} \vec{z} \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} (X_{21}, 0) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables en tout point A de l'axe (A, \vec{x}) et dans le repère orthonormé direct $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.**

Liaison pivot (1 ddl, $I_s = 2$) de direction (A, \vec{z}) , où \vec{z} est la normale au plan :

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \omega \vec{z} \\ (0, 0) \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}, \quad \left\{ S_2 \rightarrow S_1 \right\} = {}_- \left\{ \begin{array}{c} (X_{21}, Y_{21}) \\ N_{21} \vec{z} \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables en tout point A de l'axe (A, \vec{x}) et dans le repère orthonormé direct $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.**

Liaison glissière (1 ddl, $I_s = 2$) d'axe \vec{x} dans le plan :

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = {}_- \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ (V_x, 0) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad \left\{ S_2 \rightarrow S_1 \right\} = {}_- \left\{ \begin{array}{c} (X_{21}, Y_{21}) \\ N_{21} \vec{z} \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables en tout point A de l'axe (A, \vec{x}) et dans le repère orthonormé direct $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.**

Liaison encastrement (0 ddl, $I_s = 3$)

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = {}_- \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ (0, 0) \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}, \quad \left\{ S_2 \rightarrow S_1 \right\} = {}_- \left\{ \begin{array}{c} (X_{21}, Y_{21}) \\ N_{21} \vec{z} \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables en tout point A de l'axe (A, \vec{x}) et dans le repère orthonormé direct $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.**

8.3 Modélisation des mécanismes

Démarche de modélisation

Démarche pour paramétrer un système :

1. Mécanisme est-il plan ?
2. Numérotter les solides ou ensembles de solides
3. Définir les liaisons entre les solides
4. Tracer le graphe des liaisons
5. Tracer le schéma cinématique
6. Associer un repère à chaque solide
7. Paramétrer les rotations des solides en liaison (figures de calcul)
8. Définir les coordonnées des centres des liaisons
9. Paramétrer les mouvement de translation
10. Identifier l'espace de état minimal Q , c'est-à-dire choisir un paramétrage conforme minimum

Mobilité

La mobilité d'un système est la dimension de l'espace de configuration Q minimale conforme aux contraintes. La mobilité d'un système se décompose en une mobilité interne m_i et mobilité utile m_u .

$$m = m_u + m_i$$

- m_u : La mobilité utile correspond au nombre d'actionneurs (moteurs ou pistons) nécessaire au fonctionnement du système.
- m_i : La mobilité interne qui n'a aucun rôle fonctionnel, elle correspond à un mouvement d'un solide ou d'un ensemble de solides à l'intérieur du système.

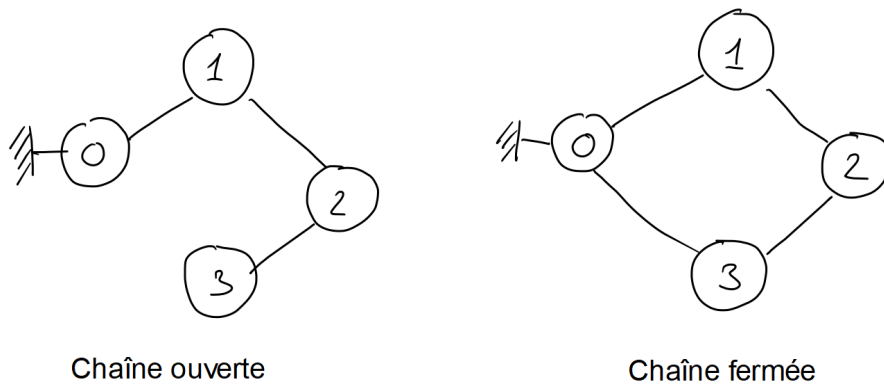
8.4 Éléments de théorie des mécanismes

La théorie des mécanismes repose sur le concept de **chaîne cinématique**, qui est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons mécaniques permettant de transmettre des mouvements.

Une chaîne cinématique peut être :

Ouverte lorsque les solides ne forment pas de boucle fermée ;

Fermée lorsque les solides forment une ou plusieurs boucles (chaînes fermées).



Mécanismes à chaînes ouvertes

Dans la pratique, les mécanismes à chaînes ouvertes sont des robots constitués de liaisons pivots et de liaisons glissières. Chaque liaison élémentaire apporte un degré de liberté (ddl) :

- **Rotation — liaison pivot** : le paramètre d'angle θ_i est variable.
- **Translation — liaison glissière** : le paramètre de distance d_i est variable.

L'espace de configuration, ou le nombre total de degrés de liberté du mécanisme, est la somme des ddl de chacune des liaisons.

Cinématique directe Consiste à déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal (l'effecteur) à partir des ddl connues des liaisons.

On va des ddl des liaisons vers l'extrémité du mécanisme.

Cinématique inverse Consiste, au contraire, à déterminer les valeurs des ddl nécessaires pour atteindre une position et une orientation données de l'effecteur.

On va de l'extrémité vers les liaisons, ce qui est souvent plus complexe, car il peut y avoir plusieurs solutions, voire aucune.

Remarque 8.8 *La cinématique directe est basée sur le concept de **composition des mouvements**.*

Pour la position d'un point P appartenant au solide S_n , on applique la relation de Chasles en parcourant les solides depuis le bâti jusqu'à S_n :

$$\overrightarrow{O_0P} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \cdots + \overrightarrow{O_nP}$$

Pour l'orientation, on utilise la composition des rotations :

$$\mathbf{R}_{n/0} = \mathbf{R}_{n/n-1} \cdot \mathbf{R}_{n-1/n-2} \cdot \cdots \cdot \mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0}$$

Pour la vitesse $\vec{V}(P/0)$, on emploie la composition des vitesses relatives :

$$\begin{aligned} \vec{V}(P/0) &= \vec{V}(P; n/0) \\ &= \vec{V}(P; n/n-1) + \vec{V}(P; n-1/n-2) + \cdots + \vec{V}(P; 2/1) + \vec{V}(P; 1/0) \end{aligned}$$

Pour le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}(n/0)$, on utilise la composition des vecteurs taux de rotation :

$$\vec{\Omega}(n/0) = \vec{\Omega}(n/n-1) + \vec{\Omega}(n-1/n-2) + \cdots + \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0)$$

Paramétrisation des liaisons d'un robot à chaîne ouverte

La paramétrisation des liaisons d'un robot à chaîne ouverte obéit à des conventions précises afin de décrire rigoureusement la cinématique du système. La convention la plus couramment utilisée est celle de **Denavit–Hartenberg (DH)**.

Principe général Pour chaque liaison L_i entre le solide S_i et le solide S_{i-1} :

- On associe un **repère \mathcal{R}_i** au solide S_i .
- L'axe \vec{z}_i du repère correspond à l'axe de la liaison :
 - pour une liaison pivot, c'est l'axe de rotation ;
 - pour une liaison glissière, c'est l'axe de translation.
- L'axe \vec{x}_i est choisi pour relier les axes \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i , ou pour être perpendiculaire à ces deux axes.
- L'axe \vec{y}_i complète la base orthonormée directe : $\vec{y}_i = \vec{z}_i \wedge \vec{x}_i$.

Paramètres de Denavit–Hartenberg Chaque transformation entre deux repères successifs \mathcal{R}_{i-1} et \mathcal{R}_i est décrite par quatre paramètres DH :

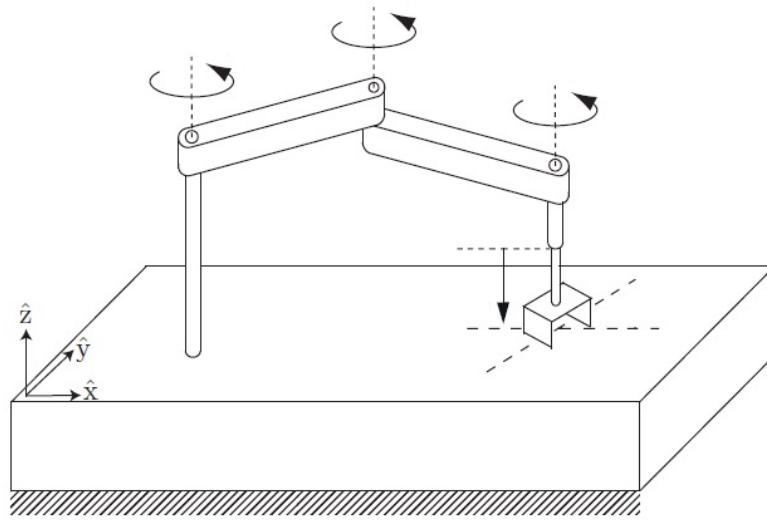
Nom	Symbole	Signification	Variable ?
Angle de torsion	α_{i-1}	Angle entre \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i autour de \vec{x}_{i-1}	Fixe
Longueur du bras	a_{i-1}	Distance entre \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i selon \vec{x}_{i-1}	Fixe
Décalage	d_i	Distance entre les origines selon \vec{z}_i	ddl
Angle de rotation	θ_i	Rotation autour de \vec{z}_i	ddl

Procédure de paramétrisation

1. Identifier chaque liaison (pivot ou glissière).
2. Associer un repère à chaque maillon.
3. Placer les axes \vec{z}_i selon les axes de liaison.
4. Définir \vec{x}_i selon la géométrie (perpendiculaire ou reliant deux axes).
5. Renseigner les quatre paramètres DH.
6. Établir les matrices de transformation homogènes $\mathbf{T}_{i/i-1}$.
7. Multiplier les matrices pour obtenir la **cinématique directe** du robot :

$$\mathbf{T}_{n/0} = \mathbf{T}_{n/n-1} \cdot \mathbf{T}_{n-1/n-2} \cdots \mathbf{T}_{2/1} \cdot \mathbf{T}_{1/0}$$

Exemple 5 : Robot SCARA



Mécanismes à chaînes fermées

Lorsqu'il existe des chaînes fermées de solides dans un mécanisme, des relations apparaissent entre les degrés de liberté (ddl) du mécanisme. Il devient alors possible de déterminer la configuration du mécanisme à partir d'un nombre de ddl restreint à la mobilité du système m .

Pour obtenir, les relations cinématiques reliant les différents ddl du mécanisme, nous pouvons utiliser γ fermetures géométriques ou cinématiques, où γ est le nombre maximal de chemins fermés indépendants. Ce nombre est appelé le **nombre cyclomatique** et vaut :

$$\gamma = N_l - N_s + 1$$

où N_l est le nombre de liaisons et N_s le nombre de solides.

Fermeture géométrique

Lorsqu'un chemin fermé apparaît dans le graphe des liaisons, noté $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n, S_1)$, la fermeture géométrique de ce chemin s'écrit :

$$\overrightarrow{O_1 O_2} + \dots + \overrightarrow{O_{n-1} O_n} + \overrightarrow{O_n O_1} = \vec{0}$$

et

$$\mathbf{R}_{0/n} \cdot \mathbf{R}_{n/n-1} \cdot \mathbf{R}_{n-1/n-2} \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0} = \mathbf{Id}$$

où \mathbf{Id} est la matrice identité. Pour chaque chemin fermé, on obtient ainsi six équations scalaires.

Dans la pratique, on n'utilise souvent que la première relation, généralement notée :

Fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{OO} = \vec{0}$$

Cette relation fournit, dans le cas tridimensionnel, au maximum trois équations scalaires indépendantes.

Fermeture cinématique

Si le chemin fermé comporte des liaisons cinématiques, il est alors possible d'écrire une équation de fermeture cinématique portant sur les vecteurs vitesse relative et taux de rotation du chemin fermé :

Fermeture cinématique :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(n/1) &= \vec{\Omega}(n/n-1) + \dots + \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(M;n/1) &= \vec{V}(M;n/n-1) + \dots + \vec{V}(M;3/2) + \vec{V}(M;2/1)\end{aligned}$$

Dans cette expression, toutes les vitesses relatives doivent impérativement être exprimées au même point M . Cette relation conduit également à six équations scalaires, qui correspondent aux dérivées des équations obtenues par la fermeture géométrique appliquée au même chemin fermé.

Remarque 8.9 *Le choix entre une fermeture géométrique et une fermeture cinématique dépendra des conditions de simplicité de mise en œuvre. Dans la pratique, on privilégie souvent la fermeture cinématique pour le vecteur taux de rotation, plus simple à manipuler que les matrices de rotation. En revanche, la fermeture géométrique $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{0}$ est souvent plus simple à appliquer que la fermeture cinématique, qui nécessite le calcul des vitesses en un même point M .*

Degré d'hyperstatisme

La présence d'une chaîne fermée dans un mécanisme entraîne une dépendance entre les multiplicateurs de Lagrange et donc entre les contraintes géométriques. Il se peut que le système soit surcontraint, c'est-à-dire **hyperstatique**. Le **degré d'hyperstatisme** h permet de mesurer le caractère hypercontraint du mécanisme. Il est défini par :

$$h = N_c - N_g$$

où N_c est le nombre de multiplicateurs de Lagrange (ou d'inconnues statiques), obtenu en additionnant les inconnues statiques de chaque liaison.

Le terme N_g correspond au nombre d'équations statiques indépendantes, défini par :

$$N_g = \begin{cases} 6(n-1) - m & \text{en 3D} \\ 3(n-1) - m & \text{en 2D} \end{cases}$$

N_g dépend du nombre de solides que l'on peut isoler et de la mobilité du système m . Le nombre de solides isolables est $(n-1)$, car on ne peut pas isoler le bâti.

Il est également possible de déterminer le degré d'hyperstatisme par une analyse cinématique du système, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$h = \begin{cases} 6\gamma + m - I_c & \text{en 3D} \\ 3\gamma + m - I_c & \text{en 2D} \end{cases}$$

avec γ le nombre cyclomatique et I_c le nombre total de ddl des liaisons.

Systèmes isostatiques et hyperstatiques

Une fois le degré d'hyperstatisme calculé, trois cas peuvent se présenter :

$h < 0$ Le problème est mal posé : les conditions ou contraintes imposées sont trop fortes. Le problème n'est pas soluble. Il faut alors revoir les hypothèses de modélisation. S'il s'agit d'un exercice, vérifiez votre dénombrement des inconnues et de la mobilité : h est, par définition, toujours positif.

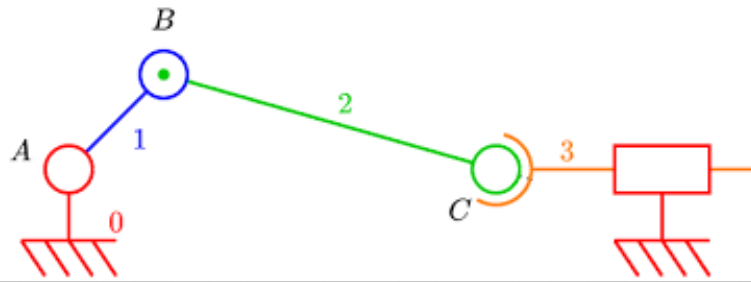
$h > 0$ Le système est **hyperstatique** (trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations). Il faut introduire des lois de comportement supplémentaires, telles que les lois de frottement (loi de Coulomb) ou les lois de déformation élastique (lois de Hooke), abordées en Résistance des Matériaux (RdM) et en Mécanique des Milieux Continus (MMC).

$h = 0$ Tout va bien : nous avons autant d'équations que d'inconnues. Le système est **isostatique**.

Exemple 6 : Liaison pivot



Exemple 7 : Système bielle-manivelle



Troisième partie

Mathématique pour la mécanique et les physico-chimistes

RAPPELS D'ANALYSE

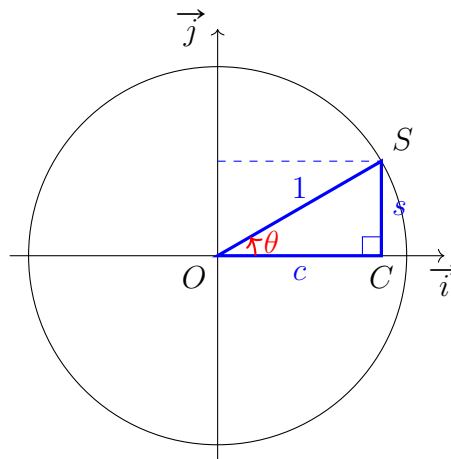
L'analyse est l'outil indispensable de la physique et de l'ingénierie, comme le langage l'est à la poésie.

– Jean Dieudonné
Architecte de la mathématique moderne française du XXe siècle.

9.1 Trigonométrie

Cercle unitaire

Soit un cercle unitaire de centre O (et de rayon 1) et un triangle rectangle OCS .



$$\cos \theta = c, \quad \sin \theta = s \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{s}{c} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

9.2 Dérivée d'une fonction

En ingénierie, la dérivée d'une fonction représente un outil fondamental pour modéliser et analyser des systèmes physiques, mécaniques, thermiques, etc. Elle permet de décrire les variations, vitesses, pentes, ou de modéliser précisément des phénomènes dynamiques. Maîtriser ses propriétés fondamentales est indispensable pour toute analyse ou simulation en mécanique, thermique, électronique, ou automatique.

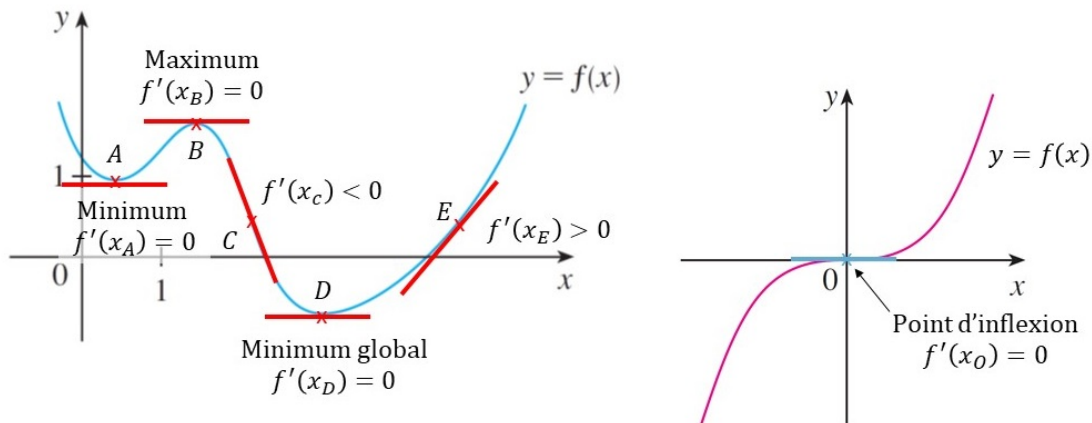
Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La dérivée de f en un point x est définie par :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si cette limite existe. Elle représente le taux de variation instantané de f en x .

Fonction dérivée et comportement



- $f'(x) > 0$: f est croissante (ex : point E).
- $f'(x) < 0$: f est décroissante (ex : point C).
- $f'(x) = 0$: point stationnaire :
 - minimum, $f''(x) > 0$, (ex : points A et D),
 - maximum, $f''(x) < 0$, (ex : point B),
 - point d'inflexion, $f''(x) = 0$, (ex : point O).

Règles de dérivation

— Linéarité :

$$(af + bg)' = af' + bg'$$

— Produit :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

— Quotient :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (\text{si } g \neq 0)$$

— Composition (chaîne) :

$$(f[g(x)])'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

Dérivées usuelles

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Linéarisation

La dérivée permet de trouver une approximation affine (ou linéaire) d'une fonction $f(x)$ en x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{lorsque } x \text{ proche de } x_0$$

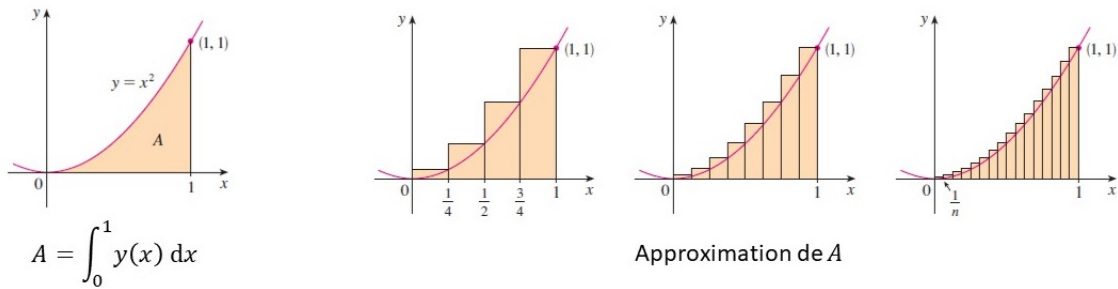
On en déduit l'équation de la tangente à $f(x)$ en x_0

$$y = ax + b$$

où $a = f'(x_0)$ est la pente de la tangente et $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ son ordonnée à l'origine.

9.3 Intégration

L'intégrale joue le rôle inverse de la dérivée : elle permet de reconstituer une grandeur à partir de son taux de variation. En physique, elle intervient dans toutes les lois de conservation et d'accumulation (énergie, charge, masse...).



Définition intuitive

L'intégrale d'une fonction réelle $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$ représente l'aire algébrique sous la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$.

$$\int_a^b f(x) dx$$

- Si $f(x) \geq 0$, cela représente une aire positive.
- Si $f(x) \leq 0$, cela correspond à une aire négative.

Définition formelle

L'intégrale est définie comme la limite d'une somme de Riemann :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, et $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

Primitives et théorème fondamental

Si F est une primitive de f , c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Notations importantes

- $\int f(x) dx$: intégrale indéfinie (primitive)
- $\int_a^b f(x) dx$: intégrale définie (valeur réelle)
- dx : variable d'intégration

Propriétés importantes

— **Linéarité :**

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

— **Additivité sur un intervalle :**

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

— **Changement de borne :**

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Intégrales usuelles

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Méthodes de calcul

a) Intégration directe (par primitives)

On identifie une primitive $F(x)$ de $f(x)$, et on applique :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

b) Intégration par changement de variable

Soit $x = g(u)$, on pose :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u_a}^{u_b} f(g(u))g'(u) du \quad \text{avec } a = g(u_a) \text{ et } b = g(u_b)$$

c) Intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

9.4 Équations différentielles ordinaires linéaires

Les équations différentielles ordinaires (EDO) permettent à l'ingénieur mécanique de modéliser le comportement dynamique des systèmes (mouvements, vibrations, transferts thermiques, circuits hydrauliques, etc.). Elles sont essentielles pour prédire, analyser et optimiser la réponse de machines et structures soumises à diverses contraintes.

9.4.1 EDO linéaire du 1^{er} ordre

Une EDO linéaire du ^{er} ordre s'écrit sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

où :

- $y = y(t)$ est la fonction inconnue,
- $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues sur un intervalle donné.

Sa solution générale est :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- $y_h(t)$ est la solution de l'équation homogène

$$y_h(t) = \frac{C}{\mu(t)}$$

- $y_p(t)$ est la solution particulière de l'équation complète

$$y_p(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t) dt$$

où C est une constante et $\mu(t)$ est le facteur intégrant défini par

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$$

Remarque 9.1 *La constante C d'intégration est déterminée en appliquant la condition initiale à la solution générale. Cela garantit l'unicité de la solution dans les conditions données (théorème de Cauchy-Lipschitz).*

Exemple

Résoudre :

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 4$$

tel que $y(0) = 0$

1. Calculer le facteur intégrant :

$$\mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

2. Déterminer la solution homogène :

$$y_h(t) = \frac{C}{\mu(t)} = C e^{-2t}$$

3. Calculer la solution particulière :

$$y_p(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t) dt = e^{-2t} \int 4e^{2t} dt = 2$$

4. En déduire la solution générale :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = 2 + C e^{-2t}$$

5. Déterminer la constante avec la condition initiale

$$y(0) = 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2$$

6. En déduire la solution

$$y(t) = 2(1 - e^{-2t})$$

9.4.2 Équation Différentielle Linéaire du Second Ordre à Coefficients Constants

Forme générale

L'EDO linéaire du second ordre à coefficients constants avec conditions initiales s'écrit :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = v_0$$

où :

- ω_0 est la pulsation propre du système (rad/s),
- ζ est le coefficient d'amortissement (sans dimension),
- $f(t)$ est un terme source (souvent nul dans les cas étudiés),
- $y(t)$ est la grandeur dynamique étudiée (position, tension, etc.).

Sa solution générale est :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- $y_h(t)$ est la solution de l'équation homogène
- $y_p(t)$ est la solution particulière de l'équation complète

Cas sans forçage : $f(t) = 0$

On étudie l'équation homogène :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est :

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Les racines r_1, r_2 déterminent la nature de la solution selon la valeur de ζ .

Cas 1 : Sur-amorti ($\zeta > 1$) Deux racines réelles distinctes r_1, r_2 négatives :

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Cas 2 : Amortissement critique ($\zeta = 1$) Une racine réelle double :

$$r = -\omega_0$$

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

Cas 3 : Sous-amorti ($0 \leq \zeta < 1$) Racines complexes conjuguées :

$$r = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_d, \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t))$$

Cas avec forçage : $f(t) \neq 0$

La méthode systématique est

1. Calculer la solution homogène $y_h(t)$
2. Chercher la forme de $y_p(t)$ en fonction de celle de $f(t)$
3. Remplacer dans l'équation non-homogène pour trouver les coefficients
4. Combiner les solutions homogènes et particulières

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

5. Appliquer les conditions initiales pour trouver les constantes A et B .

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

9.5 Dérivées partielles

- La dérivée partielle est une généralisation de la dérivée usuelle à plusieurs variables.
- Pour dériver une fonction partiellement, on **considère toutes les autres variables comme constantes**.
- Le calcul symbolique (à la main ou avec un logiciel) obéit aux mêmes règles classiques de dérivation.

Définition

Soit une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, par exemple $V(x, y)$. La **dérivée partielle** de V par rapport à x , notée $\frac{\partial V}{\partial x}$, mesure la variation de V lorsqu'on fait varier uniquement x , en gardant les autres variables constantes.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x_0 + h, y_0) - V(x_0, y_0)}{h}$$

Notations usuelles

Pour une fonction $V(x, y, z)$, on utilise différentes notations pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \partial_x V, \quad D_x V$$

Interprétation géométrique

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$: pente de la coupe de la surface $z = f(x, y)$ dans le plan $y = \text{constante}$.
- Permet de décrire la variation locale de f dans une direction donnée.

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Il est possible de dériver plusieurs fois :

- Dérivée seconde par rapport à une variable :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

- Les dérivées partielles d'ordre deux ou plus ne dépendent pas l'ordre dans lesquels on les calcule :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (\text{si } f \text{ est } \mathcal{C}^2)$$

Les dérivées partielles d'ordre deux ou plus ne dépendent pas l'ordre dans lesquels on les calcule.

La différentielle totale df

La **différentielle totale** d'une fonction de plusieurs variables $f(x, y, z)$ est la variation infinitésimale de f due aux petites variations des variables indépendantes :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Exemples

Soit le vecteur position $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, de norme :

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$V_1(x, y, z) = az$ avec $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = a$$

$$dV_1 = a dz$$

$V_2(x, y, z) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$ avec $k > 0$ et $r_0 > 0$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{1}{2}k \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_0 \right)^2 \right] = -k \frac{x}{r} (r - r_0)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} = \frac{1}{2}k \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_0 \right)^2 \right] = -k \frac{y}{r} (r - r_0)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{1}{2}k \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_0 \right)^2 \right] = -k \frac{z}{r} (r - r_0)$$

$$dV_2 = -\frac{k(r - r_0)}{r} (x dx + y dy + z dz)$$

$V_3(x, y, z) = \frac{q}{r^2}$ avec $q \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x} = q \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = -\frac{2qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = -2q \frac{x}{r^4}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} = q \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = -\frac{2qy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = -2q \frac{y}{r^4}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial z} = q \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = -\frac{2qz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = -2q \frac{z}{r^4}$$

$$dV_3 = -\frac{2q}{r^4} (x dx + y dy + z dz)$$

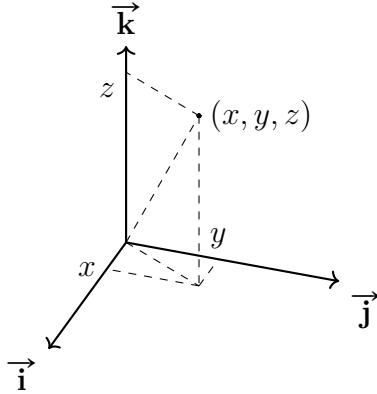
$V_4(r, \theta) = r \cos \theta$

$$\frac{\partial V_4}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial V_4}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$dV_4 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

9.6 Les systèmes de coordonnées en 3D

Coordonnées cartésiennes



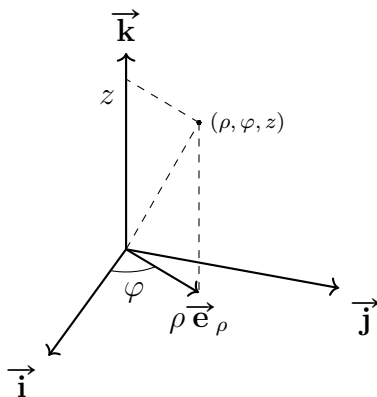
Un point est repéré par (x, y, z)

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

où :

- x : abscisse sur l'axe \vec{i} ,
- y : ordonnée sur l'axe \vec{j} ,
- z : cote sur l'axe \vec{k} .

Coordonnées cylindriques



Un point est repéré par (ρ, φ, z)

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$$

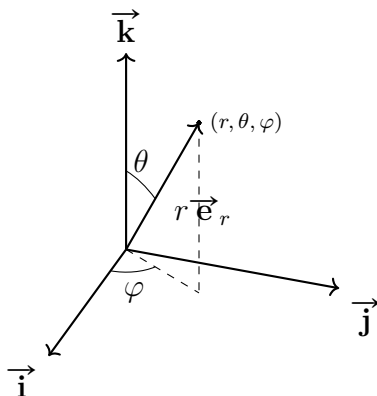
où :

- $r \geq 0$: distance à l'axe z ,
- $\varphi \in [0, 2\pi[$: angle polaire autour de l'axe z ,
- z : coordonnée sur l'axe z .

Lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

Coordonnées sphériques



Un point est repéré par (r, θ, φ)

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

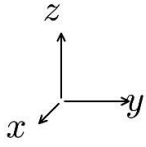
où :

- $r \geq 0$: distance à l'origine,
- $\varphi \in [0, 2\pi[$: azimut (angle autour de l'axe z),
- $\theta \in [0, \pi]$: colatitude (angle avec l'axe z).

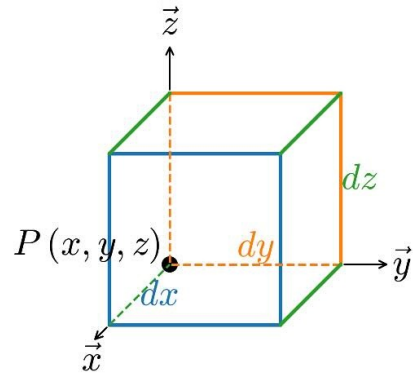
Lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

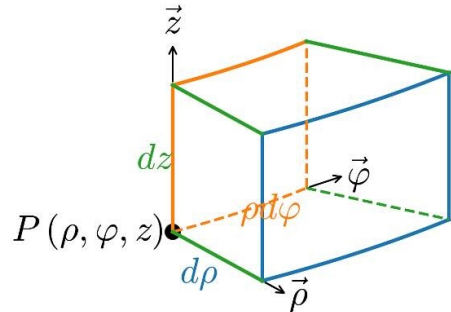
Éléments différentiels



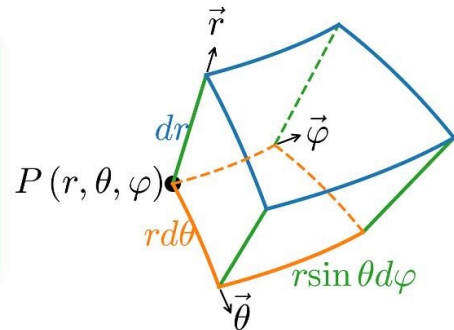
$$\begin{aligned}\vec{dl} &= dx \vec{x} + dy \vec{y} + dz \vec{z} \\ \vec{ds} &= dydz \vec{x} + dx dz \vec{y} + dx dy \vec{z} \\ dv &= dx dy dz\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\vec{dl} &= d\rho \vec{\rho} + \rho d\varphi \vec{\varphi} + dz \vec{z} \\ \vec{ds} &= \rho d\varphi dz \vec{\rho} + d\rho dz \vec{\varphi} + \rho d\rho d\varphi \vec{z} \\ dv &= \rho d\rho d\varphi dz\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\vec{dl} &= dr \vec{r} + r d\theta \vec{\theta} + r \sin \theta d\varphi \vec{\varphi} \\ \vec{ds} &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{r} + r \sin \theta dr d\varphi \vec{\theta} \\ &\quad + r dr d\theta \vec{\varphi} \\ dv &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi\end{aligned}$$



9.7 Le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$

Définition

Soit une fonction scalaire $f(x, y, z)$ définie dans \mathbb{R}^3 .
Le gradient $\vec{\nabla} f$ est le vecteur :

- normal aux surfaces de niveau,
- orienté vers les valeurs croissantes de la fonction,
- de norme égale au taux de variation maximal de la fonction.

La définition du gradient $\vec{\nabla} f$ est :

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\Gamma}$$

où df est la différentielle totale de f et $d\vec{\Gamma}$ le vecteur infinitésimal de déplacement.

Expressions du gradient

L'expression du gradient dépend du système de coordonnées

Coordonnées cartésiennes : $f(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}$$

Coordonnées cylindriques : $f(\rho, \varphi, z)$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}$$

Coordonnées sphérique : $f(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Exemples

Pour $V_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, on a :

$$\vec{\nabla} V_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Pour $V_2(\rho, \varphi, z) = \rho^2 + z^2$, on a :

$$\vec{\nabla} V_2 = \begin{pmatrix} 2\rho \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{z})}$$

Pour $V_3(r, \theta, \varphi) = r^2$, on a :

$$\vec{\nabla} V_3 = \begin{pmatrix} 2r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)}$$

QUELQUES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

La géométrie n'est pas faite pour être apprise, elle est faite pour être utilisée.

– Seymour Papert
Mathématicien et informaticien au
MIT, l'un des pionniers de l'I.A.

10.1 Les vecteurs

Définition

Un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ A et un point d'arrivée B . On définit un vecteur lié, par quatre caractéristiques

- une direction, la droite (AB)
- un sens, de A vers B
- une norme, la distance $d(A, B)$
- un point d'application, A

Coordonnées d'un vecteur

Dans l'espace vectoriel à trois dimensions, trois vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} indépendants forment une base. L'association d'un point O à cette base constitue un repère. Soit A et B ayant pour coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

avec

$$X = x_B - x_A \quad Y = y_B - y_A \quad Z = z_B - z_A$$

Les vecteurs peuvent également être écrits en colonne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}_{(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Norme d'un vecteur

La norme (ou le module) d'un vecteur est la distance en entre l'origine et l'extrémité de ce vecteur. On note

$$\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

10.2 Produit scalaire

Définition

Le produit scalaire des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel suivant noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. Linéarité : $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Expression analytique

Dans une repère orthonormée $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le produit scalaire des deux vecteurs \vec{v}_1 de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et \vec{v}_2 de coordonnées (x_2, y_2, z_2) s'écrit :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Exemple

Soient deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}_1 (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $\mathcal{B}_2 (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. La base \mathcal{B}_2 s'obtient de la base \mathcal{B}_1 par rotation d'angle θ_{12} autour du vecteur $\vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_{12}$.

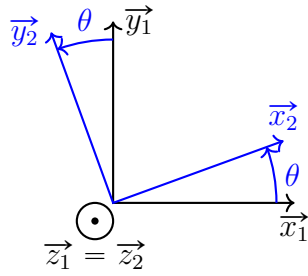


FIGURE 10.1 – Figure de calcul

$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos \theta$	$\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 = -\sin \theta$	$\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_{12} = 0$
$\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = \sin \theta$	$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 = \cos \theta$	$\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_{12} = 0$
$\vec{z}_{12} \cdot \vec{x}_2 = 0$	$\vec{z}_{12} \cdot \vec{y}_2 = 0$	$\vec{z}_{12} \cdot \vec{z}_{12} = 1$

Remarque 10.1 Pour éviter les erreurs de signes lors des projections (ou des calculs produits scalaires), **il est nécessaire de toujours représenter les figures de calculs dans la configuration de la figure ??**. C'est-à-dire de placer ici le vecteur \vec{x}_2 dans le premier quadrant entre \vec{x}_1 et \vec{y}_1 , pour $\theta_{12} \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

10.3 Produit vectoriel

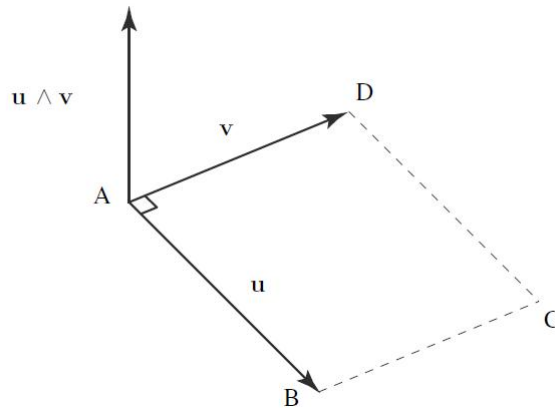


FIGURE 10.2 – Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ soit perpendiculaire au plan (\vec{u}, \vec{v}) , le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit direct et la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ soit égale à :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

Interprétation géométrique

La norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, représente la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
2. Linéarité : $\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
3. Application à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} & \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} & \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} & \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \end{array}$$

4. Double produit vectoriel (formule de Gibbs)

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{v} + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Expression analytique

Dans une repère orthonormée $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{v}_1 de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et \vec{v}_2 de coordonnées (x_2, y_2, z_2) s'écrit :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

en notation colonne

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \wedge = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{vmatrix}$$

Et en utilisant le déterminant d'une matrice 3×3 , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} \end{aligned}$$

Exemple

On reprendre le même exemple que pour le produit scalaire, c'est-à-dire de deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en rotation l'une par rapport à l'autre d'un angle θ autour du vecteur \vec{z}_{12} .

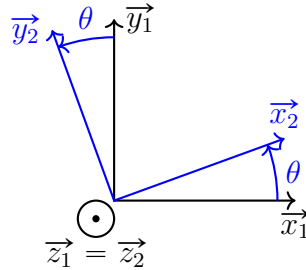


FIGURE 10.3 – Figure de calcul

$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = \sin \theta \vec{z}_{12}$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = \cos \theta \vec{z}_{12}$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_{12} = -\vec{y}_1$
$\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\cos \theta \vec{z}_{12}$	$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = \sin \theta \vec{z}_{12}$	$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_{12} = \vec{x}_1$
$\vec{z}_{12} \wedge \vec{x}_2 = \vec{y}_2$	$\vec{z}_{12} \wedge \vec{y}_2 = -\vec{x}_2$	$\vec{z}_{12} \wedge \vec{z}_{12} = \vec{0}$

10.4 Dérivée d'un vecteur

Définition

Par définition la dérivée d'un vecteur $\vec{v}(t)$ par rapport à la variable t , dans une base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le vecteur suivant :

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}$$

Par conséquent, la dérivée d'un vecteur \vec{v} dépend du choix de la base de référence \mathcal{B} dans lequel est exprimé le vecteur. En pratique, il est donc **nécessaire de toujours préciser par rapport à quelle base est effectuée la dérivée.**

Propriétés

1. Linéarité :

$$\left. \frac{d(\alpha \vec{v}_1 + \vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \alpha \left. \frac{d(\vec{v}_1)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} + \left. \frac{d(\vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}}$$

2. Dérivée du produit scalaire :

$$\left. \frac{d(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \left. \frac{d(\vec{v}_1)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \left. \frac{d(\vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}}$$

3. Dérivée d'un produit vectoriel :

$$\frac{d(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} = \frac{d(\vec{v}_1)}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \frac{d(\vec{v}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{B}}$$

4. Dérivée d'un produit mixte :

$$\frac{d(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} = \left(\frac{d\vec{v}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}}, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right) + \left(\vec{v}_2, \frac{d\vec{v}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}}, \vec{v}_3 \right) + \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \frac{d\vec{v}_3}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} \right)$$

5. Dérivée d'un vecteur dépendant d'une fonction :

$$\frac{d\vec{v}(\theta(t))}{dt} \Big|_{\mathcal{B}} = \frac{d\vec{v}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\mathcal{B}} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Formule de Bour

La formule de Bour, ou formule de dérivation d'un vecteur dans une base mobile, permet de relier la dérivée d'un vecteur dans la \mathcal{B}_1 à celle dans la base \mathcal{B}_2 .

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{v}$$

où $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)$ est le vecteur taux de rotation de la base \mathcal{B}_2 par rapport à la base \mathcal{B}_1 .

Quelques propriétés du vecteur vitesse de rotation

1. Composition des vecteurs vitesses de rotations

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_1) = \vec{\Omega}(\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_2) + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)$$

2. Inversion des bases de dérivations

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) = -\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)$$

Exemple

On se place toujours dans le cas de deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en rotation l'une par rapport à l'autre d'un angle θ autour du vecteur \vec{z}_{12} .

Les dérivées des vecteurs de la $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ rapport à la base \mathcal{B}_1 sont nulles

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} = \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} = \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} = \vec{0}$$

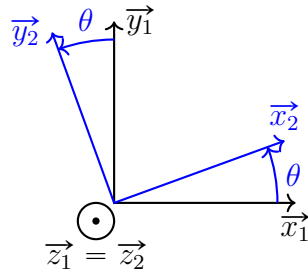


FIGURE 10.4 – Figure de calcul

La projection des vecteurs

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 &= -\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1 \\ \vec{z}_2 &= \vec{z}_1\end{aligned}$$

En dérivant les expressions de droite, on obtient

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{x}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_1 = \dot{\theta} \vec{y}_2 \\ \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{x}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_1 = -\dot{\theta} \vec{x}_2 \\ \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Dans notre exemple, le vecteur taux de rotation de la base \mathcal{B}_2 par rapport à la base \mathcal{B}_1 est porté par l'axe de rotation $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ et de norme la vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

Utilisation de la formule de changement de dérivation dans la base mobile

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{x}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 = \dot{\theta} \vec{y}_2 \\ \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta} \vec{x}_2 \\ \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2 = \vec{0}\end{aligned}$$

Remarque 10.2 Les expressions de $\left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1}$ et $\left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1}$ dans la base \mathcal{B}_2 sont plus simples. Bien qu'on dérive par rapport à la base \mathcal{B}_1 , l'utilisation de la formule de changement de base de dérivation conduit à des expressions simples dans la base \mathcal{B}_2 .

Remarque 10.3 Dans notre exemple, on constate que dériver les vecteurs \vec{x}_2 et \vec{y}_2 dans la base \mathcal{B}_1 revient à les multiplier par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et à leur appliquer une rotation d'angle $+\pi/2$ autour de l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$.

RAPPEL SUR LES MATRICES 3×3

11.1 Définition d'une matrice 3×3

Une matrice 3×3 est un tableau de 3 lignes et 3 colonnes contenant des nombres. On la note généralement :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Chaque élément a_{ij} correspond à la valeur située à la **ligne** i et à la **colonne** j .

11.2 Produit matrice-vecteur

Le produit d'une matrice 3×3 par un vecteur colonne X de dimension 3×1 donne un nouveau vecteur colonne $Y = AX$ de dimension 3×1 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

alors

$$Y = A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Exemple : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

alors :

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 0 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times (-1) \\ 0 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

11.3 Produit de matrices

Définition

Soient deux matrices A et B telles que :

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

Le **produit matriciel** $C = A \cdot B$ est défini si et seulement si le **nombre de colonnes de A** est égal au **nombre de lignes de B** . Le résultat est une matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

Chaque élément c_{ij} de C est obtenu par le produit scalaire de la i -ème ligne de A avec la j -ème colonne de B :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Produit de matrices carrées 3×3

Dans le cas particulier où $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, le produit $C = AB$ est encore une matrice 3×3 :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

Exemple Considérons les deux matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le produit $C = A \cdot B$ est défini car les deux matrices sont carrées de même taille. On calcule chaque élément c_{ij} par :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

Calcul détaillé :

$$c_{11} = 1(-2) + 2(0) + 3(1) = -2 + 0 + 3 = 1$$

$$c_{12} = 1(1) + 2(-1) + 3(0) = 1 - 2 + 0 = -1$$

$$c_{13} = 1(0) + 2(3) + 3(2) = 0 + 6 + 6 = 12$$

$$c_{21} = 0(-2) + 1(0) + 4(1) = 0 + 0 + 4 = 4$$

$$c_{22} = 0(1) + 1(-1) + 4(0) = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$c_{23} = 0(0) + 1(3) + 4(2) = 0 + 3 + 8 = 11$$

$$c_{31} = 5(-2) + 6(0) + 0(1) = -10 + 0 + 0 = -10$$

$$c_{32} = 5(1) + 6(-1) + 0(0) = 5 - 6 + 0 = -1$$

$$c_{33} = 5(0) + 6(3) + 0(2) = 0 + 18 + 0 = 18$$

Résultat final :

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 4 & -1 & 11 \\ -10 & -1 & 18 \end{bmatrix}$$

Propriétés du produit matriciel

Pour toutes matrices A, B, C de dimensions compatibles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (AB)C = A(BC) & \text{(associativité)} \\ A(B + C) = AB + AC & \text{(distributivité à gauche)} \\ (B + C)A = BA + CA & \text{(distributivité à droite)} \\ AI = IA = A & \text{(élément neutre)} \\ (AB)^\top = B^\top A^\top & \text{(transposition d'un produit)} \end{array} \right.$$

Attention : le produit matriciel n'est pas commutatif en général :

$$AB \neq BA$$

même lorsque les deux produits sont définis.

11.4 Transposée d'une matrice

La matrice transposée A^T s'obtient en **inversant les lignes et les colonnes** de A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

11.5 Déterminant d'une matrice 3×3

Le déterminant d'une matrice 3×3 , noté $\det(A)$, est défini par :

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Exemple numérique :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1(1 \times 0 - 4 \times 6) - 2(0 \times 0 - 4 \times 5) + 3(0 \times 6 - 1 \times 5) = (-24) + 40 - 15 = 1$$

11.6 Inverse d'une matrice 3×3

Définition

Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice A^{-1} telle que :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

où I est la matrice identité :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A^{-1} s'appelle **l'inverse** de A .

Condition d'inversibilité

Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul :

$$\det(A) \neq 0$$

Si $\det(A) = 0$, la matrice est dite **singulière** et n'admet pas d'inverse.

Propriétés de l'inverse

Pour deux matrices inversibles A et B de même taille :

$$\begin{cases} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \\ (A^{-1})^{-1} = A \\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \end{cases}$$

11.7 Matrice orthogonale

Une matrice \mathbf{R} est dite **orthogonale** si :

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = I$$

où I est la matrice identité. Dans ce cas, son déterminant vaut toujours $+1$ ou -1 :

$$\det(\mathbf{R}) = \pm 1$$

11.8 Matrices de rotation dans \mathbb{R}^3

Les matrices de rotation sont des cas particuliers de matrices orthogonales. Elles permettent de décrire la **rotation d'un repère** ou d'un **vecteur** autour d'un axe fixe de l'espace.

Définition

Une matrice $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est une matrice de rotation si elle vérifie :

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = I \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{R}) = 1$$

L'ensemble des matrices de rotation forme le groupe spécial orthogonal :

$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = I, \det(\mathbf{R}) = 1 \}$$

Ces matrices permettent de représenter les orientations d'un solide indéformable ou le passage d'un repère local à un repère global.

Action d'une rotation sur un vecteur

Soit un vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ exprimé dans le repère \mathcal{R}_1 . Si \mathcal{R}_2 est obtenu par rotation de \mathcal{R}_1 via la matrice $\mathbf{R}_{2/1}$, alors :

$$[\vec{\mathbf{v}}]_1 = \mathbf{R}_{2/1} \cdot [\vec{\mathbf{v}}]_2 \quad \text{et réciproquement} \quad [\vec{\mathbf{v}}]_2 = \mathbf{R}_{2/1}^T \cdot [\vec{\mathbf{v}}]_1$$

Rotations élémentaires

Les rotations autour des axes de base $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$ sont données par les matrices suivantes :

Rotation autour de l'axe $\vec{\mathbf{x}}$ d'un angle θ :

$$\mathbf{R}_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe \vec{y} d'un angle θ :

$$\mathbf{R}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe \vec{z} d'un angle θ :

$$\mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaque matrice est orthogonale, et :

$$\mathbf{R}_X(\theta)^T = \mathbf{R}_X(-\theta) \quad ; \quad \mathbf{R}_Y(\theta)^T = \mathbf{R}_Y(-\theta) \quad ; \quad \mathbf{R}_Z(\theta)^T = \mathbf{R}_Z(-\theta)$$

Composition de rotations

Deux rotations successives se composent par un **produit matriciel** :

$$\mathbf{R}_{\text{total}} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$$

La composition n'est **pas commutative** :

$$\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$$

ce qui reflète la nature géométrique de la rotation dans l'espace.

11.9 Changement de base dans \mathbb{R}^3

Ce type de transformation est fondamental en mécanique pour exprimer :

- un **vecteur** (position, vitesse, accélération) dans un autre repère,
- ou un **tenseur** (inertie, contraintes) dans un repère différent.

Changement de base d'un vecteur

Soient deux bases orthonormées directes de \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

On note par $\mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}$ la **matrice de passage** de la base \mathcal{B}_2 vers la base \mathcal{B}_1 , définie par :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= a_{11}\vec{x}_1 + a_{21}\vec{y}_1 + a_{31}\vec{z}_1, \\ \vec{y}_2 &= a_{12}\vec{x}_1 + a_{22}\vec{y}_1 + a_{32}\vec{z}_1, \\ \vec{z}_2 &= a_{13}\vec{x}_1 + a_{23}\vec{y}_1 + a_{33}\vec{z}_1.\end{aligned}$$

On constate que la matrice de passage de la base \mathcal{B}_2 vers la base \mathcal{B}_1 est identique à matrice de rotation de 2 par rapport à 1

$$\mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = \mathbf{R}_{2/1}$$

Par conséquent, cette matrice est orthogonale :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}^\top \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = \mathbf{I}$$

Relation entre les coordonnées : Si un vecteur \vec{v} a pour coordonnées :

$$\vec{v} = \begin{cases} [v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} & \text{dans la base } \mathcal{B}_1, \\ [v]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2} & \text{dans la base } \mathcal{B}_2. \end{cases}$$

Alors :

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} \cdot [v]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{2/1} \cdot [v]_{\mathcal{B}_2} \quad \text{et réciproquement} \quad [v]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}^\top \cdot [v]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{R}_{2/1}^\top \cdot [v]_{\mathcal{B}_1}$$

Changement de base d'une matrice

Soit une matrice \mathbf{A} représentant une application linéaire (par exemple une transformation ou un tenseur) dans la base \mathcal{B}_1 :

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_1}$$

et soit $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_2}$ sa représentation dans la base \mathcal{B}_2 .

Le lien entre ces deux représentations est donné par la formule :

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_1} \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}$$

ou encore, comme $\mathbf{R}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}^\top$:

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}^\top [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_1} \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}$$

11.10 Matrices symétriques et bases propres

Dans de nombreux domaines de la mécanique (tenseurs d'inertie, contraintes, déformations, etc.), on rencontre des matrices carrées 3×3 réelles et **symétriques**. Ces matrices possèdent des propriétés remarquables qui facilitent grandement leur interprétation géométrique et leur utilisation en calcul.

Définition

Une matrice carrée \mathbf{A} d'ordre 3 est dite **symétrique** si elle est égale à sa transposée :

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Autrement dit, pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$,

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Ainsi, une matrice symétrique s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Valeurs propres et vecteurs propres

Une valeur propre λ de \mathbf{A} est un scalaire réel tel qu'il existe un vecteur non nul \vec{x} vérifiant :

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Le vecteur \vec{x} est alors appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ . L'ensemble des valeurs propres est obtenu en résolvant l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0,$$

où \mathbf{I} est la matrice identité d'ordre 3.

Propriétés fondamentales

Toute matrice réelle symétrique \mathbf{A} vérifie les propriétés suivantes :

1. Toutes ses valeurs propres sont **réelles**.
2. Ses vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont **orthogonaux**.
3. Il existe une **base orthonormée** de vecteurs propres de \mathbf{A} .

Ces propriétés sont des conséquences directes du **théorème spectral**.

Théorème spectral : Toute matrice réelle symétrique \mathbf{A} d'ordre 3 peut être diagonalée par une matrice orthogonale \mathbf{Q} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T,$$

où :

- \mathbf{D} est une matrice diagonale contenant les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de \mathbf{A} ;
- les colonnes de \mathbf{Q} sont les vecteurs propres unitaires associés.

Interprétation géométrique

Les vecteurs propres de \mathbf{A} définissent une base orthonormée dans laquelle la matrice devient diagonale. Dans cette **base propre**, la transformation linéaire associée à \mathbf{A} agit uniquement par dilatation selon trois directions perpendiculaires. Autrement dit :

$$\mathbf{A} \vec{\mathbf{e}}_i = \lambda_i \vec{\mathbf{e}}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

où $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ est la base propre.

Cette propriété est essentielle pour :

- simplifier le calcul des tenseurs d'inertie ;
- analyser les états de contraintes ou de déformations ;
- étudier la stabilité ou les vibrations dans les systèmes mécaniques.

Exemple numérique

Considérons la matrice symétrique :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ donne les valeurs propres réelles suivantes :

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2.$$

Les vecteurs propres associés sont orthogonaux, et la matrice \mathbf{A} peut être diagonalisée :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T, \quad \text{avec } \mathbf{D} = \text{diag}(5, 2, 2).$$

Dans la base propre, la matrice \mathbf{A} agit comme une dilatation selon trois directions orthogonales.