Université Gustave Eiffel

Statique des solides

Fabrice DETREZ

Table des matières

Préambule

Ce cours s'inspire de l'ouvrage :

Mécanique pour ingénieurs – Tome 1 : Statique,
Ferdinand P. Beer, Elwood Russell Johnston, David F. Mazurek, Elliot R. Eisenberg,
traduction de Céline Mercier-Tremblay.

Nous invitons les étudiants à consulter cet ouvrage à la bibliothèque afin d'approfondir les notions abordées et de trouver des exercices supplémentaires.

Première partie

Statique du solide

Chapitre 1

Rappel de statique du point

Dans ce chapitre, nous allons rappellé l'effet de forces appliquées à des particules, c'est-à-dire à des corps dont la forme et la taille se rapprochent de celles d'une particule ; les forces agissant sur ces corps peuvent donc être considérées comme ayant le même point d'application.

1.1 Démarche d'une étude de statique

1. **Modéliser le système**
   — Définir le *système* étudié.
   — Schématiser clairement le système avec une figure.
   — Paramétrer les angles et les distances.
   — Choisir d'un référentiel galiléen, $\mathcal{R}_g$
   — Poser les *hypothèses* : frottements négligés ou non, champ de pesanteur uniforme, problème plan ou 3D.
   — Lister les actions mécaniques.
2. **Formuler**
   — Appliquer le PFS
3. **Résoudre**
   — Lister le nombre d'équations et d'inconnues
   — Projeter les équations d'équilibre
   — Résoudre le système d'équation
4. **Interpréter et vérifier**
   — Vérifier la cohérence dimensionnelle et physique : unités, ordre de grandeurs.
   — Analyser la précision des résultats.
   — Comparer avec des résultats expérimentaux et/ou d'autre modélisations et/ou des résultats existants sur des systèmes similaires.

1.2 Modéliser le système

1.2.1 Schématiser le système

Exemple : Boulon

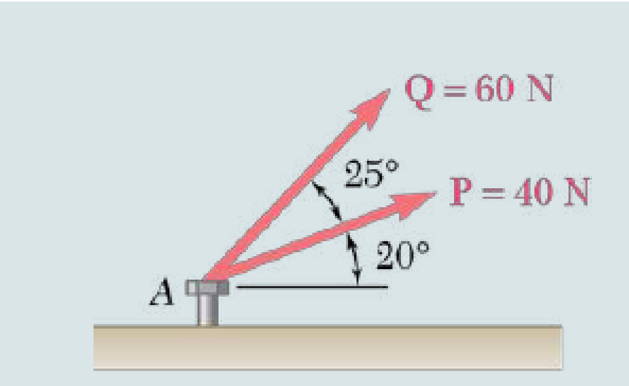
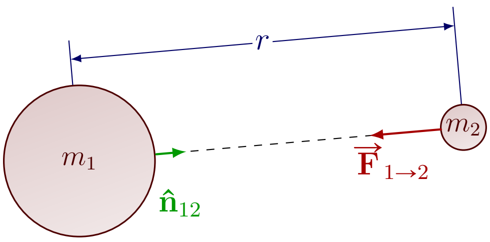


Schéma du système **Graphe de structure**

1.2.2 Lister les actions mécanique : Bilan des Actions Mécaniques (BAM)

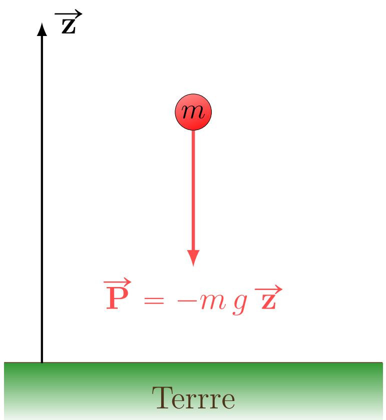
Action de la gravité



$$\vec{\mathbf{F}}(1 \to 2) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{\mathbf{n}}$$

où $G = 6.67\,10^{-11}\,\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$ est la constante gravitationnelle

Action de pesanteur



$$\vec{\mathbf{P}}(\text{Terre} \to 1) = -m\,g\,\vec{\mathbf{z}}$$

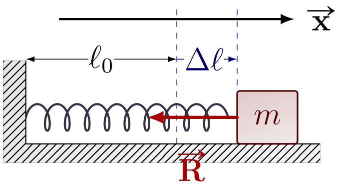
avec $g \approx 9.81\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

Remarque 1.1 *L'action de pesanteur est l'approximation de l'action de gravité de la terre sur une masse m lorsqu'on est à la surface de la terre.*

$$g = G\frac{m_T}{R_T^2}$$

où m_T est la masse de la Terre et R_T sont rayon.

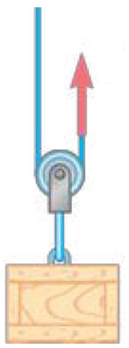
Action d'un ressort



$$\vec{\mathbf{R}}(\text{ressort} \to 1) = -k\,(l - l_0)\,\vec{\mathbf{x}}$$

où $k > 0$ est la raideur du ressort.
k a pour unité $\mathrm{N.m^{-1}}$.

Force dans un cable



La tension $\vec{\mathbf{T}}$ dans un câble est la force exercée sur le câble par un système auquel il est attaché. Elle est modélisée par un vecteur porté par l'axe du câble, orienté du point d'attache vers l'extérieur du câble, et dont la norme est égale à l'intensité de la tension. Un câble idéal est supposé inextensible, de masse négligeable et ne pouvant transmettre que des efforts de traction ; il ne peut donc exercer qu'une force de traction et jamais de compression.

Remarque 1.2 *Lorsqu'un câble passe sur une ou plusieurs poulies idéales (poulies sans masse et sans frottement), la tension est la même en tout point du câble. La poulie ne modifie que la direction de la force exercée par le câble, sans en changer la norme. Ainsi, chaque portion du câble exerce sur les systèmes auxquels elle est attachée une force de traction de même intensité, dirigée suivant l'axe local du câble.*

En présence de frottements dans les poulies ou si le câble possède une masse non négligeable, la tension n'est plus uniforme le long du câble.

Action électromagnétique

- Force de Coulomb
- Force magnétique

1.3 Formuler : Principe Fondamentale de la Statique

Une particule est en équilibre dans un référentiel galiléen lorsque la résultante de toutes les forces agissant sur elle est nulle.

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$$

1.4 Résoudre

Pour résoudre l'équation vectorielle de la statique, il faut :

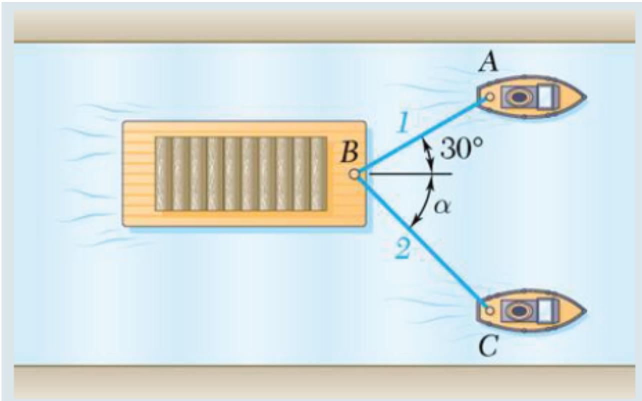
— Choisir une base de calcul

— Calculer la résultante des forces $\vec{\mathbf{R}} = \sum \vec{\mathbf{F}}$

— Résoudre le système d'équations issu de la projection de $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ dans une base

Exemple de calculs de résultantes

Remorquage d'un chaland

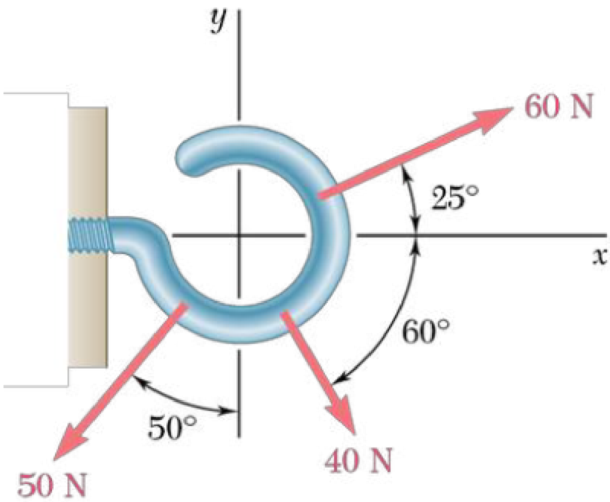


Un chaland est tiré par deux remorqueurs. Si la résultante des deux forces exercées par les remorqueurs est de 5000 N et dirigée parallèlement à l'axe du chaland, déterminer :

a) la tension dans chaque câble pour $\alpha = 45°$;

b) la valeur de α pour laquelle la tension dans le câble 2 est minimale.

Effort sur un crochet



a) Déterminer les composantes de chacune des forces sur crochet dans la base $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})$.

b) En déduire les composantes de la résultante $\overrightarrow{\mathbf{R}}$

1.5 Analyser

1.5.1 Vérifier

La rigueur dans la vérification des résultats est essentielle en mécanique, notamment en ingénierie ou en génie civile. Il est indispensable de contrôler systématiquement les unités des grandeurs manipulées :

— les angles doivent être exprimés dans une unité cohérente (degrés ou radians selon le contexte),

— les efforts doivent être correctement évalués en newtons ou en kilonewtons.

Une incohérence d'unités conduit inévitablement à des résultats physiquement incorrects.

Par ailleurs, les calculs théoriques doivent être confrontés, lorsque cela est possible, à des observations expérimentales obtenues sur des maquettes ou des prototypes. Cette comparaison permet de valider les hypothèses de modélisation et constitue une étape fondamentale dans la conception et le dimensionnement des ouvrages de génie civil ou des systèmes mécaniques.

1.5.2 Précision des valeurs

En calcul scientifique et en ingénierie, la précision des résultats obtenus est, en général, du même ordre de grandeur que celle des données d'entrée. Ainsi, lorsque les grandeurs utilisées dans les calculs (efforts mesurés, dimensions géométriques, angles) sont connues avec une précision de l'ordre de 0,1 %, il n'est ni réaliste ni pertinent de présenter des résultats avec une précision supérieure. Les résultats numériques doivent donc être arrondis de manière cohérente, en accord avec la précision des données initiales et les incertitudes de mesure. Cette démarche permet d'éviter une fausse impression d'exactitude et contribue à une interprétation plus fiable et plus rigoureuse des calculs en ingénierie.

> Dans le cadre de ce cours nous choisirons une précision classique de $0,1\,\%$.

Exemple d'arrondi cohérent avec tolérance Supposons qu'un effort soit calculé à partir de mesures connues avec une précision de l'ordre de 0,1 %. Si le calcul conduit à une valeur numérique

$$F = 12\,346 \text{ N},$$

l'incertitude associée est d'environ

$$\Delta F \simeq 0{,}001 \times 12\,346 \approx 12 \text{ N}.$$

Il est alors cohérent de présenter le résultat sous la forme

$$F = 12{,}35 \text{ kN} \pm 0{,}01 \text{ kN},$$

ou, de manière équivalente,

$$F \approx 12{,}35 \text{ kN}.$$

Cet arrondi est compatible avec la tolérance sur les données et évite de surestimer la précision du calcul.

Propagation des incertitudes Les incertitudes associées aux grandeurs mesurées se propagent au cours des calculs et affectent la précision du résultat final. Lorsque plusieurs grandeurs interviennent dans une expression, l'incertitude sur le résultat dépend à la fois des incertitudes individuelles et de la sensibilité du résultat à chacune de ces grandeurs. En pratique, une estimation raisonnable de l'incertitude permet de juger de la fiabilité du résultat et d'adapter le nombre de chiffres significatifs retenus.

1.6 Exemples d'exercice

1.6.1 Démarche de résolution d'un exercice de statique d'une particules

1. **Isoler** une particule ou plusieurs particules
2. **Lister** les forces extérieures (BAME)
3. **Formuler** (appliquer le PFS)
4. **Résoudre** (projeter les équations vectorielle dans une base)
5. **Analyser**

Manutention d'une caisse

Considérons la caisse de 75 kg. Initialement posée sur le sol entre deux édifices, cette caisse est soulevée et chargée sur un camion afin d'être transportée. Pour l'opération, un câble vertical supporte la caisse. Le point A est attaché à deux cordes passant dans des poulies fixées de part et d'autre, aux points B et C des deux édifices.

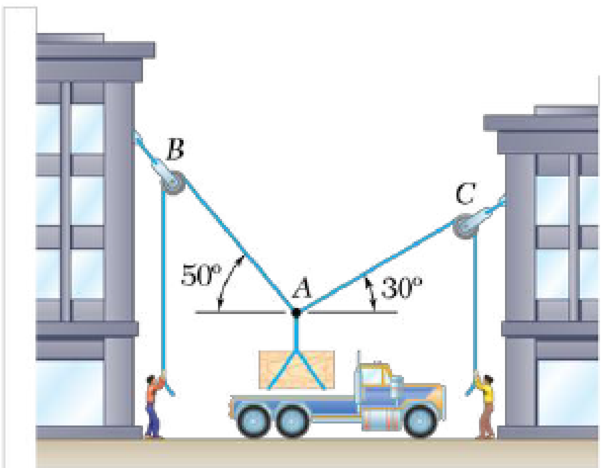


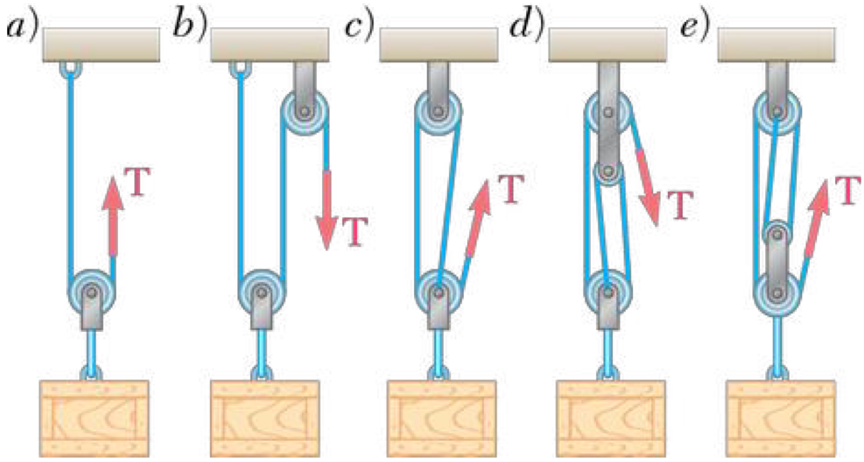
Schéma d'ensemble

a) Déterminer la tension dans les cordes AB et AC. est minimale.

Le palan

Un palan est un dispositif mécanique constitué de plusieurs poulies fixes et mobiles, reliées par un câble, permettant de réduire l'effort nécessaire pour soulever une charge, au prix d'un allongement du déplacement du câble.

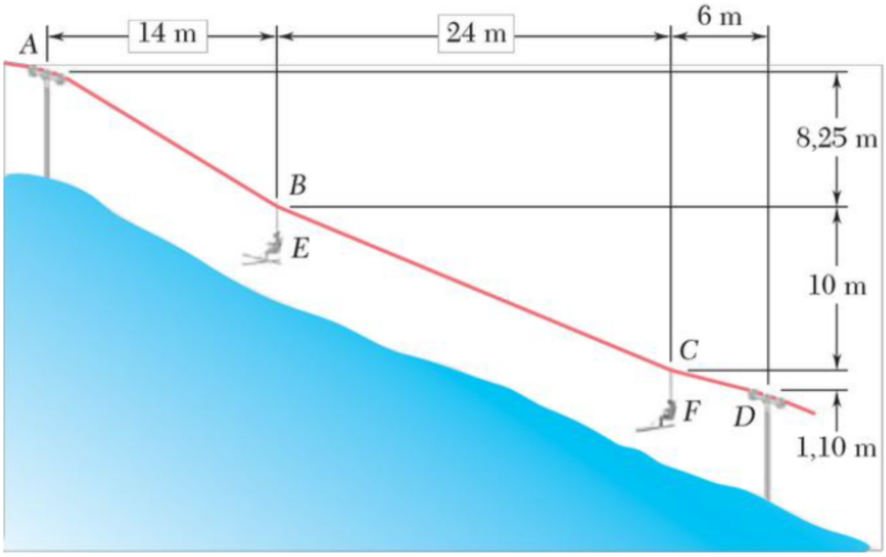
Une caisse de 61,2 kg doit être soulevée. Divers montages sont proposés.



a) Déterminez la tension T pour chacune de ces configurations (a à e). *Suggestion :* pour cette situation, on suppose que la tension dans la corde est la même de chaque côté de la poulie. On suppose également que toutes les sections rectilignes de la corde sont parallèles.

Télésiège

Un télésiège a été arrêté à la position illustrée sur la figure. Sachant que chaque siège du télésiège pèse 50 kg et que la personne assise dans le siège E pèse 80 kg.



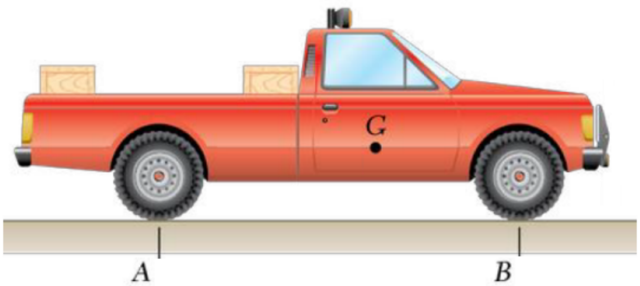
a) Déterminez le poids de la personne assise dans le siège F.

Chapitre 2

Corps rigides - Moment d'une force Systèmes de force équivalents

Un corps rigide est un modèle idéalisé d'un solide pour lequel on suppose que les distances entre tous ses points restent constantes au cours du mouvement ou sous l'action des forces. Cette hypothèse permet de négliger les déformations et de se concentrer uniquement sur l'étude du mouvement et de l'équilibre du solide.

2.1 Forces externes et internes



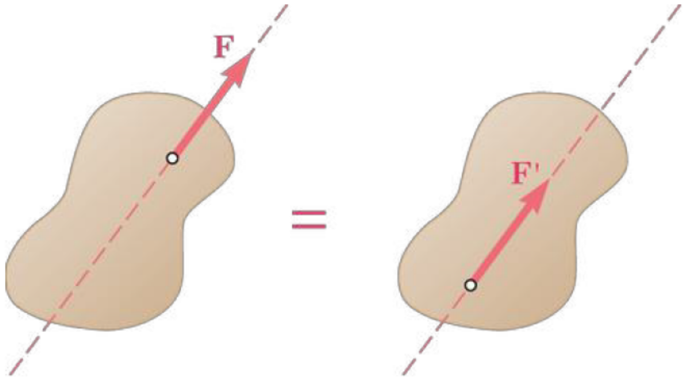
Il est impératif de choisir et d'isoler le système étudié pour définir clairement les forces internes et externes.

1. Les forces externes représentent l'action d'autres corps sur le corps rigide considéré. Elles déterminent à elles seules le comportement externe du corps en question, c'est-à-dire qu'elles peuvent le mettre en mouvement ou, au contraire, le maintenir immobile.

2. Les forces internes sont celles qui assurent l'intégrité du corps rigide. Elles comprennent les interactions entre les particules constitutives ainsi que les forces qui retiennent ensemble les différentes parties de la structure, s'il y a lieu.

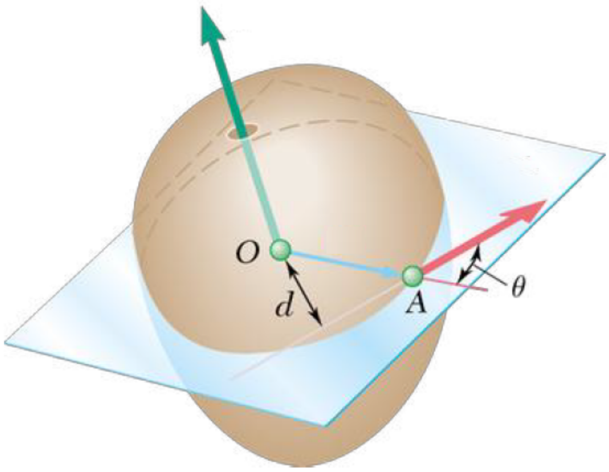
2.2 Principe de transmissibilité (ou de glissement)

Le **principe de transmissibilité** stipule que le glissement d'une force le long de sa ligne d'action n'altère pas son effet sur un corps rigide.



Deux forces de même grandeur, de même direction et de même ligne d'action sont alors équivalentes, même lorsqu'elles sont appliquées en des points distincts du corps.

2.3 Moment d'une force autour d'un point



Le vecteur moment d'une force $\vec{\mathbf{F}}$ par rapport à un point O est défini par le produit vectoriel

$$\vec{\mathbf{M}}(O; \vec{\mathbf{F}}) = \overrightarrow{\mathbf{OA}} \wedge \vec{\mathbf{F}}$$

où $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ est le vecteur tracé à partir du point O vers le point d'application A de la force $\vec{\mathbf{F}}$.

Propriétés du moment d'une force

- Le vecteur moment $\overrightarrow{\mathbf{M}}(O; \overrightarrow{\mathbf{F}})$ est perpendiculaire au plan défini par le vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ et la force $\overrightarrow{\mathbf{F}}$. Il est donc perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ et à $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$.
- La norme du moment est donnée par

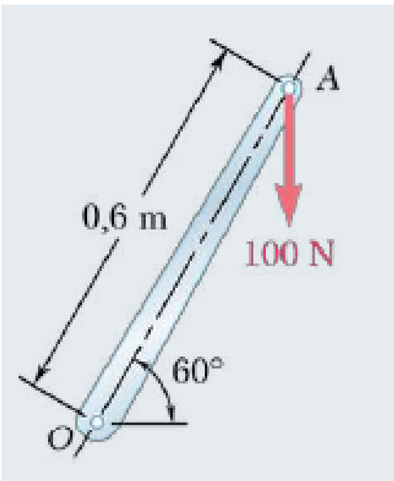
$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{M}}(O; \overrightarrow{\mathbf{F}})\right\| = d \left\|\overrightarrow{\mathbf{F}}\right\|,$$

  où d est le *bras de levier*, c'est-à-dire la distance perpendiculaire entre le point O et la ligne d'action de la force $\overrightarrow{\mathbf{F}}$.
- L'unité du moment est le newton mètre ($\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$).
- Le sens du vecteur moment est déterminé par la règle de la main droite : en enroulant les doigts de la main droite dans le sens de rotation induit par la force autour du point O, le pouce tendu indique la direction et le sens du vecteur moment.
- Si la ligne d'action de la force passe par le point O, le bras de levier est nul et le moment de la force par rapport à O est nul.

Interprétation physique du moment d'une force Le moment d'une force traduit la capacité de cette force à produire une rotation d'un corps autour d'un point ou d'un axe donné. Il dépend à la fois de l'intensité de la force, de sa direction et de la position de sa ligne d'action par rapport au point de référence.

Plus la force est appliquée loin du point considéré, ou plus sa direction est favorable à la rotation, plus son moment est important. Ainsi, le moment quantifie l'efficacité d'une force à faire tourner un corps.

Exemple 1 : Levier



Une force verticale de 100 N est appliquée à l'extrémité d'un levier attaché à un axe en O. Déterminez :

a) le moment de la force par rapport à O ;

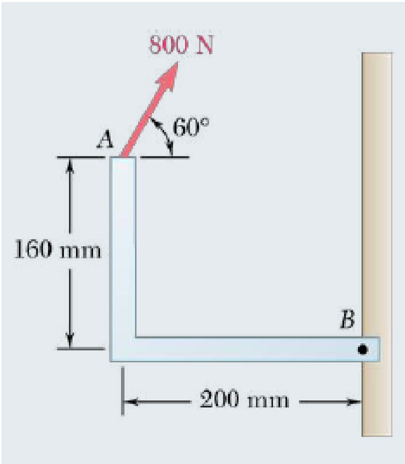
b) la grandeur de la force horizontale appliquée en A qui produira le même moment par rapport à O ;

c) la force minimale qui, appliquée au point A, produira le même moment ;

d) la distance par rapport à l'axe à laquelle il faut placer une force verticale de 240 N pour créer le même moment par rapport à O ;

e) si l'une des forces trouvées en b), c) et d) est équivalente à la force de 100 N.

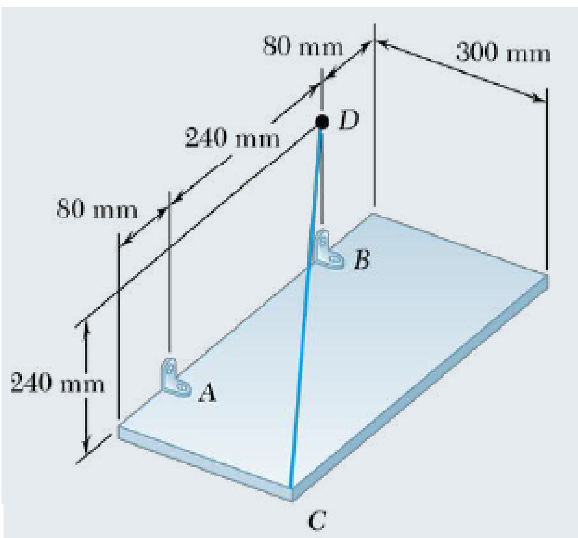
Exemple 2 : Support



Une force de 800 N agit sur le support.

a) Calculez le moment de la force par rapport au point B.

Exemple 3 : Plate-forme

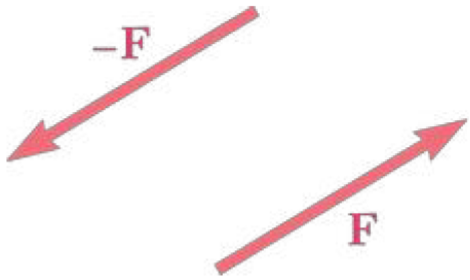


Une plate-forme rectangulaire est fixée à un mur à l'aide de deux supports A et B et d'un fil de fer CD. La tension dans CD est de 200 N.

a) Évaluez le moment, par rapport au point A, de la force exercée par le fil de fer au point C.

2.4 Couples

2.4.1 Définition

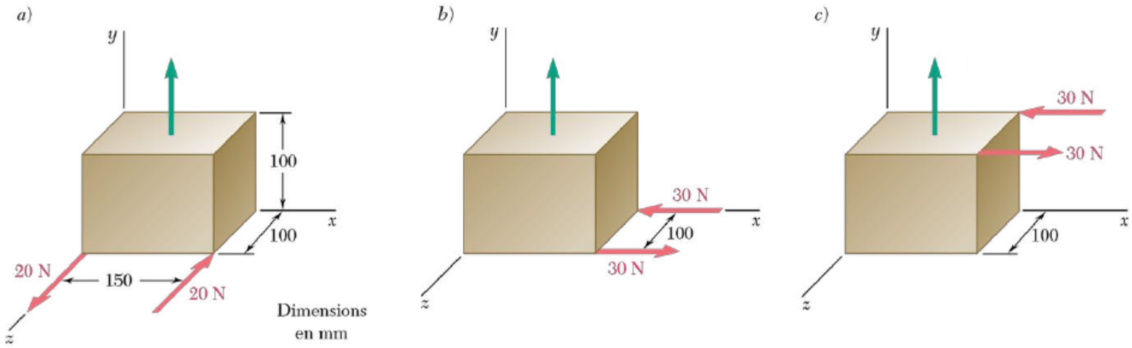


Un couple est formé de deux forces $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ et $-\overrightarrow{\mathbf{F}}$ d'égale grandeur et agissant en sens opposé selon des lignes d'action parallèles.
Le moment d'un couple est indépendant du point où il a été calculé ; c'est un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ perpendiculaire au plan du couple. Sa norme est égale au produit de la norme de la force $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ par la distance d.

La somme de deux couples $\overrightarrow{\mathbf{C}}_1$ et $\overrightarrow{\mathbf{C}}_2$ forme un couple résultant $\overrightarrow{\mathbf{C}}_R$

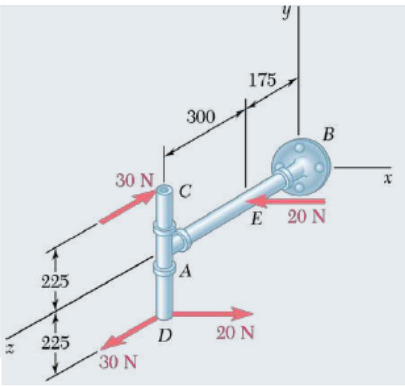
$$\overrightarrow{\mathbf{C}}_R = \overrightarrow{\mathbf{C}}_1 + \overrightarrow{\mathbf{C}}_2$$

2.4.2 Couples équivalents



Deux couples ayant le même moment $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ sont dits *équivalents*, c'est-à-dire qu'ils auront le même effet sur le corps rigide sur lequel ils sont appliqués.

Exemple 4 : Montage de tuyauterie

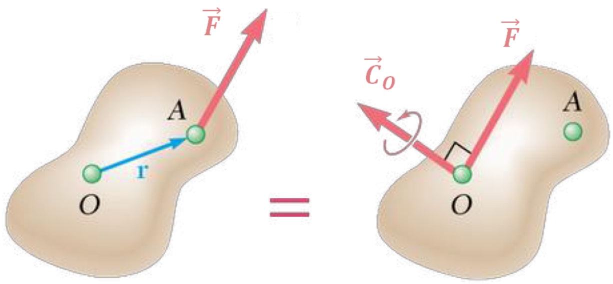


a) En vous référant au montage de tuyauterie, calculez les composantes d'un couple unique équivalent aux deux couples présents.

2.5 Système force-couple

2.5.1 Système force-couple d'une force

Toute force $\vec{\mathbf{F}}$ appliquée à un point A d'un corps rigide peut être remplacée par un système force-couple agissant à un point quelconque O. Ce système force-couple est constitué de la force $\vec{\mathbf{F}}$ appliquée à O et d'un couple de moment $\vec{\mathbf{C}}_O = \vec{\mathbf{M}}(O; \vec{\mathbf{F}})$ égal au moment autour de O de la force $\vec{\mathbf{F}}$ à sa position d'origine.



La force $\vec{\mathbf{F}}$ et le vecteur-couple associé $\vec{\mathbf{C}}_O = \vec{\mathbf{M}}(O; \vec{\mathbf{F}})$ sont toujours perpendiculaires l'un à l'autre.

2.5.2 Réduction d'un système de forces en un système force-couple

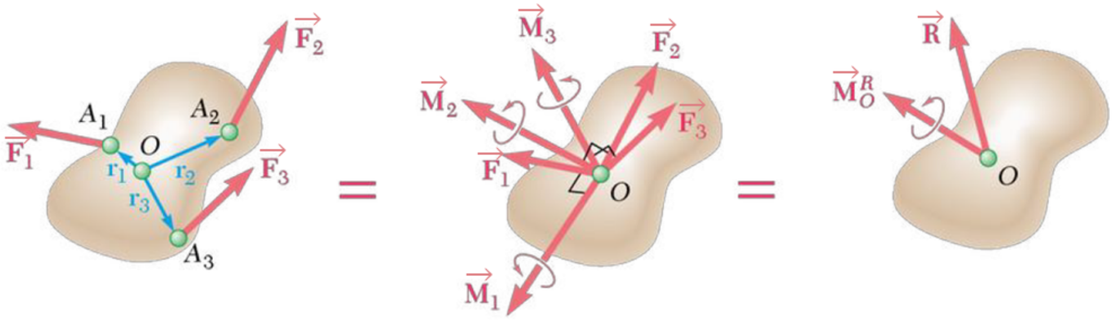
Il en découle que tout système de forces $\{\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{F}}_N\}$ peut être réduit à un système force-couple agissant à un point donné O.

Cela se réalise :

a) en remplaçant chacune des forces du système par un système équivalent force-couple agissant au point O ;

b) en additionnant ensuite toutes les forces et tous les couples pour obtenir une force résultante $\vec{\mathbf{R}}$ et un vecteur-couple résultant $\vec{\mathbf{M}}^R(O)$.

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i, \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{M}}^R(O) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}(O; \vec{\mathbf{F}}_i)$$



Habituellement, la résultante $\vec{\mathbf{R}}$ et le vecteur-couple résultant $\vec{\mathbf{M}}^R(O)$ ne sont pas perpendiculaires l'un à l'autre.

2.5.3 Torseur d'un système force-coupe

L'outil mathématique adapté à la structure d'un système force-couple en A est le torseur.

$$_A\left\{\mathcal{T}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{l}\vec{\mathbf{R}}\\ \vec{\mathbf{M}}^R(A)\end{array}\right\},$$

où $\vec{\mathbf{R}}$ est la force résultante du système force-couple et$\vec{\mathbf{M}}^R(A)$ son moment résultant en A.

La résultant et le moment d'un torseur sont liés par la formule de transport ou formule de Varignon :

$$\vec{\mathbf{M}}^R(B) = \vec{\mathbf{M}}^R(A) + \vec{\mathbf{BA}} \wedge \vec{\mathbf{R}},$$

qui exprime la manière dont le moment se transforme lorsque l'on change de point de réduction.

2.5.4 Système de forces équivalent

Définition

Deux systèmes de forces $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \vec{\mathbf{F}}_3, \ldots$ et $\vec{\mathbf{F}}'_1, \vec{\mathbf{F}}'_2, \vec{\mathbf{F}}'_3, \ldots$ sont équivalents si, et seulement si,

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_i = \sum \vec{\mathbf{F}}'_i \qquad \text{et} \qquad \sum \vec{\mathbf{M}}(0; \vec{\mathbf{F}}_i) = \sum \vec{\mathbf{M}}(O, \vec{\mathbf{F}}'_i)$$

ou si leurs forces résultantes et leurs moment résultante en un point O sont égaux

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}' \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{M}}^R(O) = \vec{\mathbf{M}}^{R\prime}(O)$$

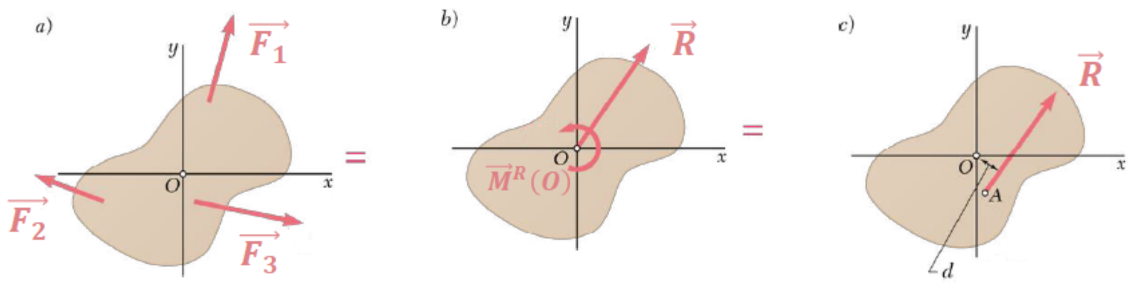
Réduction avancée d'un système de forces

Si la force résultante $\vec{\mathbf{R}}$ et le vecteur-couple résultant $\vec{\mathbf{M}}^R(O)$ sont perpendiculaires, le système force-couple au point O peut être réduit encore plus à une seule force résultante. Cela est le cas de systèmes constitués :

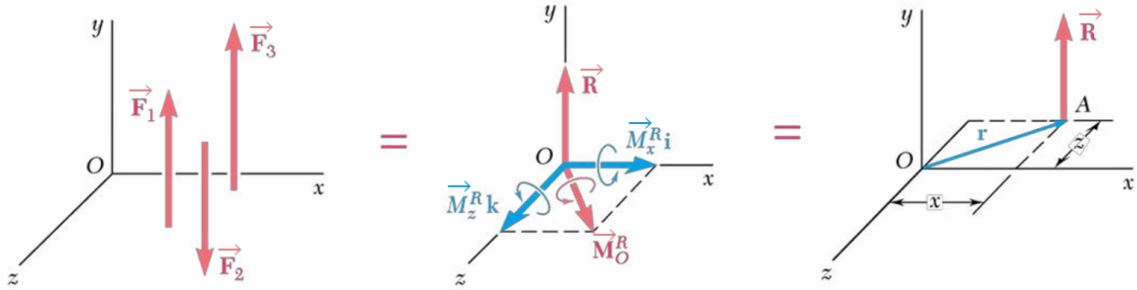
1 - de forces concourantes en O qui ont le même point d'application est qui peuvent être additionnée directement pour obtenir la résultante comme au chapitre 1 sur l'équilibre d'une particule

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{M}}^R(O) = \vec{\mathbf{0}}$$

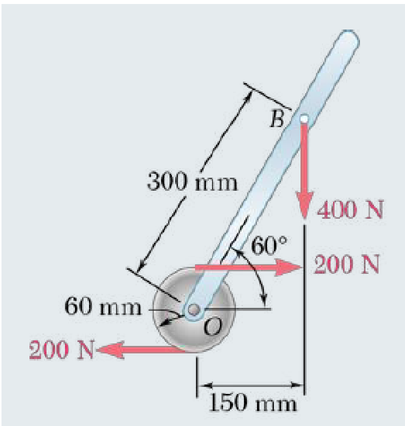
2 - de forces coplanaires (voir exemple 6)



3 - de forces parallèles (voir exemple 7)



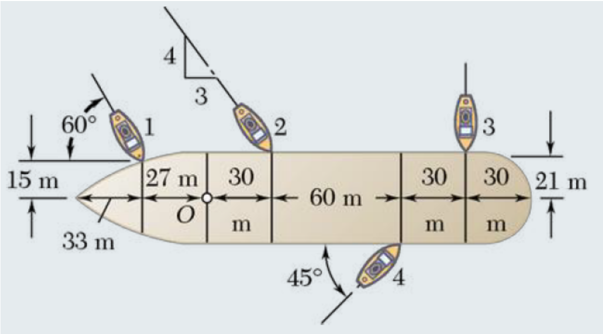
Exemple 5 : Levier



a) Remplacez le couple et la force illustrés ci-contre par une force unique équivalente appliquée au levier.

b) Calculez ensuite la distance entre le point O et le point d'application de cette force équivalente.

Exemple 6 : accostage d'un transatlantique

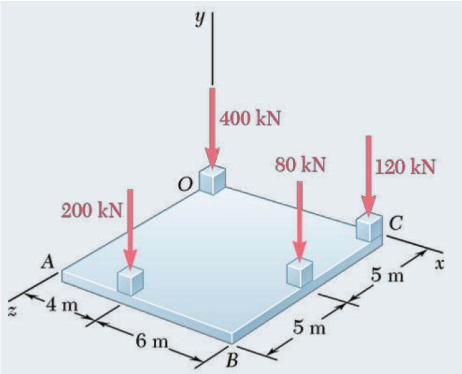


Quatre remorqueurs exercent chacun une poussée de 5000 N sur un transatlantique pour accostage (*voir la figure ci-contre*). Déterminez :

a) le système force-couple équivalent au mât de misaine situé au point O ;

b) le point sur la coque du navire où un seul remorqueur plus puissant devra pousser pour produire le même effet que l'ensemble des quatre remorqueurs.

Exemple 7 : Dalle de fondation



La dalle de fondation d'un petit édifice supporte quatre colonnes, comme illustré.

a) Déterminez la grandeur et le point d'application de la résultante des quatre charges.

2.5.5 Système de forces réparties

Dans de nombreux problèmes de statique et de génie civil, les actions mécaniques ne sont pas concentrées en un point, mais réparties sur une longueur, une surface ou un volume. On parle alors de *forces réparties*. Ces actions sont modélisées par des densités de force, dont l'unité dépend du type de répartition.

Forces réparties linéiques

Une force répartie linéique est définie le long d'une ligne (poutre, câble, arête). Elle est caractérisée par une densité linéique de force notée $\vec{\mathbf{f}}_l(s)$, exprimée en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

La force résultante équivalente est donnée par :

$$\vec{\mathbf{R}} = \int_L \vec{\mathbf{f}}_l(s)\,\mathrm{d}s,$$

où s désigne l'abscisse curviligne le long de la ligne L.

Le moment résultant du système de forces réparties par rapport au point O est donné par :

$$\vec{\mathbf{M}}^R(O) = \int_L \overrightarrow{OM}(s) \wedge \vec{\mathbf{f}}_l(s)\,\mathrm{d}s,$$

où $M(s)$ désigne le point d'application de la densité de force $\vec{\mathbf{f}}_l(s)$ associé à l'abscisse curviligne s.

Forces réparties surfaciques

Une force répartie surfacique agit sur une surface (pression d'un fluide, charge sur une dalle). Elle est décrite par une densité surfacique de force $\vec{\mathbf{p}}(M)$ ou pression, exprimée en $\mathrm{N}{\cdot}\mathrm{m}^{-2} = Pa$.

La force résultante associée est :

$$\vec{\mathbf{R}} = \iint_S \vec{\mathbf{p}}(M)\,\mathrm{d}S.$$

Le moment résultant du système de forces réparties par rapport au point O est donné par :

$$\vec{\mathbf{M}}^R(O) = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\mathbf{p}}(M)\,\mathrm{d}S,$$

où M désigne le point d'application de la pression $\vec{\mathbf{p}}(M)$.

Forces réparties volumiques

Une force répartie volumique agit dans tout un volume (poids propre d'un matériau, forces d'inertie). Elle est caractérisée par une densité volumique de force $\vec{\mathbf{b}}(M)$, exprimée en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

La force résultante est alors donnée par :

$$\vec{\mathbf{R}} = \iiint_V \vec{\mathbf{b}}(M)\,\mathrm{d}V. \tag{2.1}$$

Le moment résultant du système de forces réparties par rapport au point O est donné par :

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}^R(O) = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\mathbf{b}}(M)\,\mathrm{d}V,$$

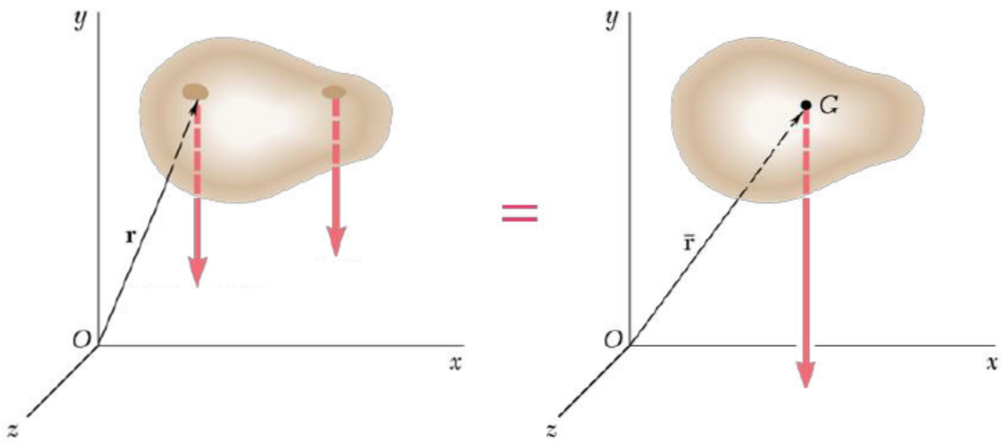
où M désigne le point d'application de la force volumique $\overrightarrow{\mathbf{b}}(M)$.

Cas particulier des répartitions uniformes

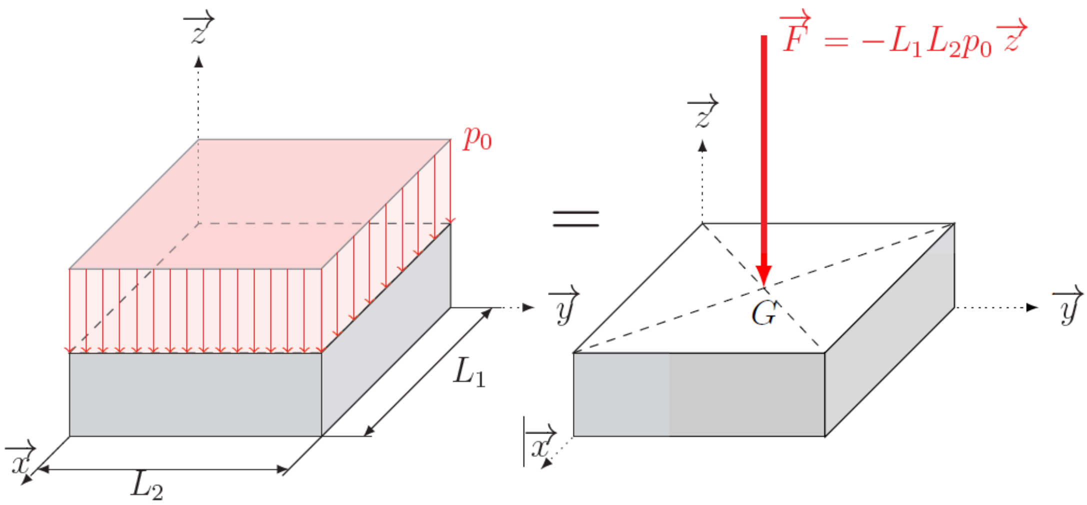
Lorsque la répartition est uniforme, la force résultante peut être appliquée au *centre de gravité* de la ligne, de la surface ou du volume considéré. Dans ce cas, le moment du système par rapport à ce point est nul, ce qui permet de remplacer directement la force répartie par une force concentrée appliquée en ce point.

Exemples de répartitions de forces

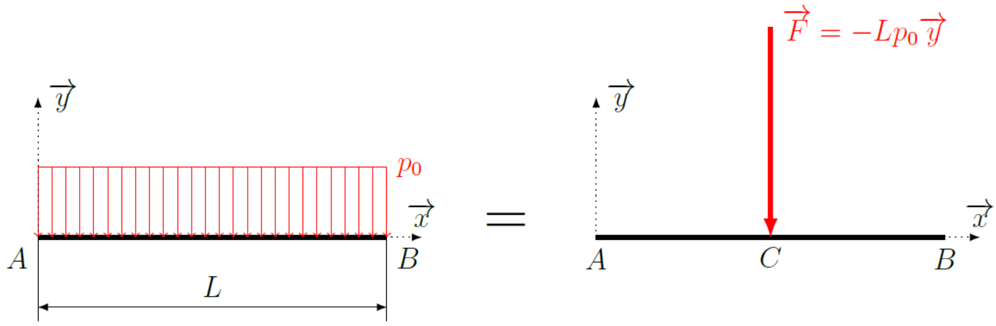
Action de pesanteur : le Poids



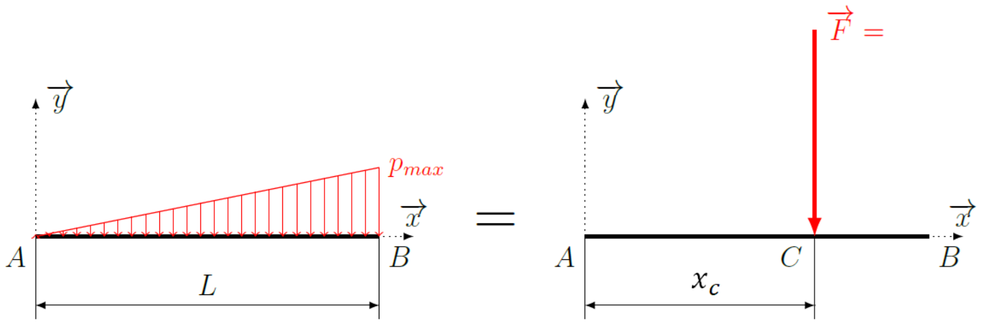
Pression uniforme



Charge linéique uniforme



Charge linéique triangulaire



Chapitre 3

Statique du solide

3.1 Démarche d'une étude de statique

1. **Modéliser le système**

   — Définir le *système* étudié.

   — Schématiser clairement le système avec une figure.

   — Paramétrer les angles et les distances.

   — Choisir d'un référentiel galiléen, $\mathcal{R}_g$

   — Poser les *hypothèses* : frottements négligés ou non, champ de pesanteur uniforme, problème plan ou 3D.

   — Lister les actions mécaniques.

2. **Formuler**

   — Appliquer le PFS

3. **Résoudre**

   — Lister le nombre d'équations et d'inconnues

   — Projeter les équations d'équilibre

   — Résoudre le système d'équation

4. **Interpréter et vérifier**

   — Vérifier la cohérence dimensionnelle et physique : unités, ordre de grandeurs.

   — Analyser la précision des résultats.

   — Comparer avec des résultats expérimentaux et/ou d'autre modélisations et/ou des résultats existants sur des systèmes similaires.

3.2 Modéliser le système

3.2.1 Schématiser le système

Exemple : Pont en treillis

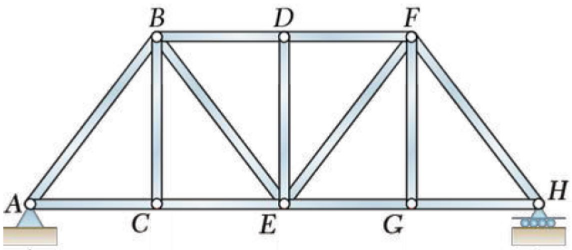


Schéma du système **Graphe de structure**

3.2.2 Lister les actions mécanique : Bilan des Actions Mécaniques (BAM)

Modélisation des actions mécaniques

En mécanique du solide rigide, une action mécanique $\mathcal{A}$ est modélisée par un système forces-couple défini en un point, c'est-à-dire par :

- une **Résultante** : $\vec{\mathbf{R}}$,
- un **Moment** en un point A : $\vec{\mathbf{M}}(A)$

où de manière concise par un torseur

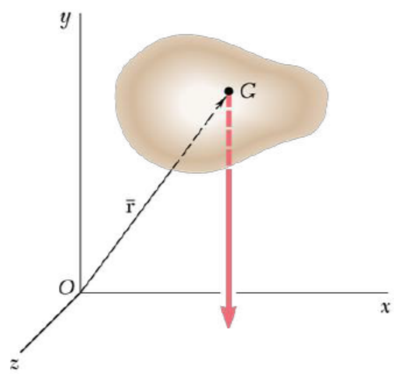
$$\mathcal{A} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}} \\ \vec{\mathbf{M}}(A) \end{array} \right\}}$$

L'action mécanique $\mathcal{B}$ peut être transportée en n'importe quel point B, à l'aide de la :

Formule de Varigon

$$\vec{\mathbf{M}}(B) = \vec{\mathbf{M}}(A) + \vec{\mathbf{BA}} \wedge \vec{\mathbf{R}}$$

Action de pesanteur : le poids



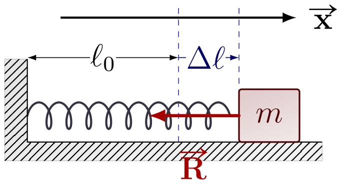
Force au centre de gravité G

$$\vec{\mathbf{P}} = -m\,g\,\vec{\mathbf{y}}$$

avec $g \approx 9.81\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

$$\vec{\mathbf{M}}(G; \vec{\mathbf{P}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

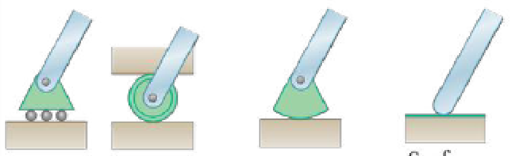
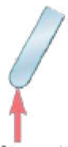
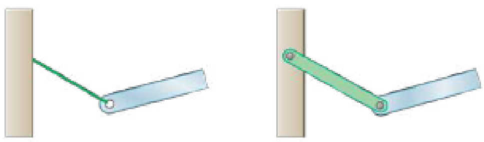
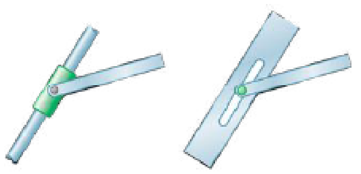
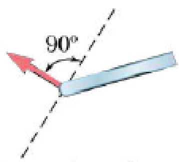
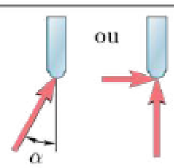
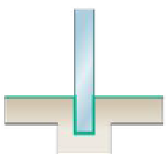
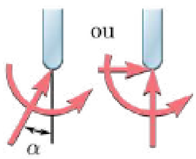
Action d'un ressort



$$\vec{\mathbf{R}} = -k\,(l - l_0)\,\vec{\mathbf{x}}, \quad \vec{\mathbf{M}}(A;\vec{\mathbf{R}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

où $k > 0$ est la raideur du ressort.
k a pour unité N.m^{-1}.

Action de liaison

Appuis ou liaisons	Réaction	Nombre d'inconnues
 Rouleaux Bascule Surface sans frottement	 Force d'une ligne d'action connue	1
 Câble Barre articulée	 Force d'une ligne d'action connue	1
 Manchon sans frottement Rainure sans frottement	 Force d'une ligne d'action connue	1
 Pivot ou goupille d'articulation = rotule plane Surface rugueuse	 Force d'une direction inconnue	2
 Encastrement	 Force et couple	3

3.3 Formuler : Principe Fondamentale de la Statique

Une solide ou ensemble de solide $\mathcal{S}$ est en équilibre dans un référentiel galiléen lorsque la résultante et le moment résultant en un point A de toutes les actions mécaniques extérieures agissant sur lui est nulle.

P.F.S

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$
$$\sum \overrightarrow{\mathbf{M}}(A) = \overrightarrow{\mathbf{0}} \qquad \forall A$$

3.4 Résoudre

3.4.1 Isostatisme et hyperstatisme

Avant de résoudre un problème de statique, il est impératif de vérifier s'il est *a priori* solvable. Pour cela, le nombre d'inconnues statiques I_s doit être comparé au nombre d'équations statiques indépendantes E_s.

Degré d'hyperstatisme

$$h = I_s - E_s$$

où I_s est le nombre d'inconnues statiques et E_s le nombre d'équations statiques indépendantes.

En fonction de la valeur du degré d'hyperstatisme h, on distingue les cas suivants :

- $\mathbf{h = 0}$ **:** le problème est *isostatique*. Il peut être résolu uniquement à l'aide des équations de la statique du solide indéformable.
- $\mathbf{h > 0}$ **:** le problème est *hyperstatique*. Il ne peut pas être résolu uniquement par la statique. Il est nécessaire d'introduire des équations supplémentaires issues d'autres modèles physiques, tels que les lois du frottement ou la déformation des solides.
- $\mathbf{h < 0}$ **:** ce cas n'est théoriquement pas admissible. Il indique la présence d'au moins une équation statique redondante du type $0 = 0$, correspondant à une mobilité du système. Dans ce cas, le calcul du nombre d'équations statiques indépendantes E_s doit être réexaminé.

Calcul du nombre d'inconnues Le nombre d'inconnues statiques I_s est obtenu en listant l'ensemble des inconnues associées aux liaisons ainsi que les éventuelles inconnues liées aux actions mécaniques appliquées au système.

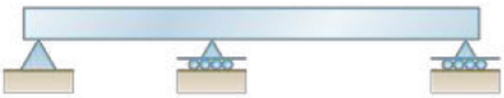
Calcul du nombre d'équations Le nombre d'équations statiques indépendantes E_s dépend du nombre de solides N constituant le système et de sa mobilité m.

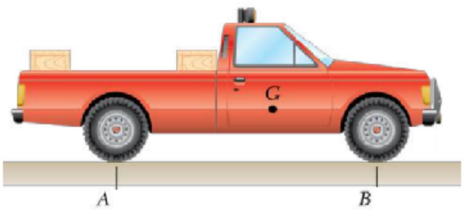
Nombre d'équations statiques indépendantes

$$E_s = 3N - m \quad \text{(en 2D)}$$
$$E_s = 6N - m \quad \text{(en 3D)}$$

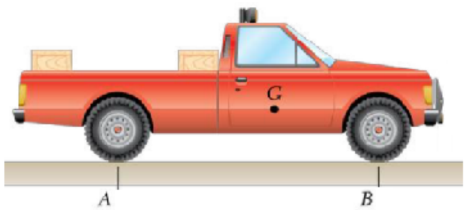
où N est le nombre de solides **sans compter le bâti** et m la mobilité du système.

Exemples





Sans frottement



Avec frottement

3.4.2 Résoudre

Pour résoudre le système de 2 équations vectorielles issus du PFS, il faut :

— Choisir une base de calcul $\mathcal{B}$

— Calculer le système force-couple résultante des actions mécaniques extérieurs

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum \vec{\mathbf{F}} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{M}}^R(A) = \sum \vec{\mathbf{M}}(A)$$

— Projeter les 2 équations vectorielles issues du PFS dans la base de calcul $\mathcal{B}$

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{M}}^R(A) = \vec{\mathbf{0}}$$

— Résoudre le système d'équations issu des projections de $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ et de $\vec{\mathbf{M}}^R(A) = \vec{\mathbf{0}}$.

Remarque 3.1 *Le choix du point A utilisé pour exprimer l'équation du moment n'est pas unique. En pratique, on choisit le point qui permet de simplifier au maximum les calculs. Ce choix repose sur l'expérience et s'acquiert avec la pratique.*

3.5 Analyser

3.5.1 Vérifier

Les unités La rigueur dans la vérification des résultats est essentielle en mécanique, notamment en ingénierie ou en génie civile. Il est indispensable de contrôler systématiquement les unités des grandeurs manipulées :

— les angles doivent être exprimés dans une unité cohérente (degrés ou radians selon le contexte),

— les efforts doivent être correctement évalués en newtons ou en kilonewtons.

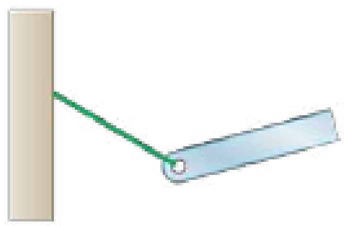
Une incohérence d'unités conduit inévitablement à des résultats physiquement incorrects.

Validité physique des résultats Certaines liaisons possèdent des conditions de validité qui doivent impérativement être vérifiées afin de garantir la cohérence physique des résultats obtenus.

Câble : un câble ne peut travailler qu'en traction. L'effort exercé par le câble sur un solide doit donc être dirigé vers l'extérieur de la matière :

$$\vec{\mathbf{T}} = T\,\vec{\mathbf{n}}_t, \qquad T > 0$$

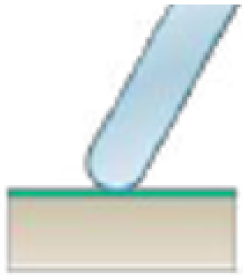
où $\vec{\mathbf{n}}_t$ est le vecteur unitaire donnant la direction du câble, orienté vers l'extérieur du solide.



Contact ponctuel sans frottement : pour que le contact soit maintenu, l'effort normal exercé au point de contact doit impérativement être dirigé vers l'intérieur de la matière :

$$\overrightarrow{\mathbf{N}} = N\,\overrightarrow{\mathbf{n}}_c, \qquad N > 0$$

où $\overrightarrow{\mathbf{n}}_c$ est le vecteur normal au contact, orienté vers l'intérieur du solide.



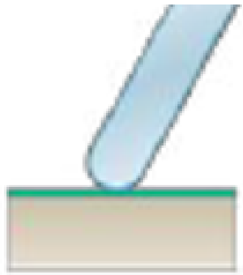
Contact ponctuel avec frottement : comme précédemment, l'effort normal au contact doit être dirigé vers l'intérieur de la matière :

$$\overrightarrow{\mathbf{N}} = N\,\overrightarrow{\mathbf{n}}_c, \qquad N > 0$$

L'effort tangent dû au frottement doit quant à lui respecter les lois de Coulomb :

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{T}}_t\right\| \leqslant f_s \left\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\right\|$$

où f_s est le coefficient de frottement statique, dépendant de la nature des matériaux en contact.



Confrontation des résultats avec l'expérience Par ailleurs, les calculs théoriques doivent être confrontés, lorsque cela est possible, à des observations expérimentales obtenues sur des maquettes ou des prototypes. Cette comparaison permet de valider les hypothèses de modélisation et constitue une étape fondamentale dans la conception et le dimensionnement des ouvrages de génie civil ou des systèmes mécaniques.

3.5.2 Précision des valeurs

En calcul scientifique et en ingénierie, la précision des résultats obtenus est, en général, du même ordre de grandeur que celle des données d'entrée. Ainsi, lorsque les grandeurs utilisées dans les calculs (efforts mesurés, dimensions géométriques, angles) sont connues avec une précision de l'ordre de 0,1 %, il n'est ni réaliste ni pertinent de présenter des résultats avec une précision supérieure. Les résultats numériques doivent donc être arrondis de manière cohérente, en accord avec la précision des données initiales et les incertitudes de mesure. Cette démarche permet d'éviter une fausse impression d'exactitude et contribue à une interprétation plus fiable et plus rigoureuse des calculs en ingénierie.

Dans le cadre de ce cours nous choisirons une précision classique de $0,1\,\%$.

Exemple d'arrondi cohérent avec tolérance Supposons qu'un effort soit calculé à partir de mesures connues avec une précision de l'ordre de 0,1 %. Si le calcul conduit à une valeur numérique

$$F = 12\,346 \text{ N},$$

l'incertitude associée est d'environ

$$\Delta F \simeq 0{,}001 \times 12\,346 \approx 12 \text{ N}.$$

Il est alors cohérent de présenter le résultat sous la forme

$$F = 12{,}35 \text{ kN} \pm 0{,}01 \text{ kN},$$

ou, de manière équivalente,

$$F \approx 12{,}35 \text{ kN}.$$

Cet arrondi est compatible avec la tolérance sur les données et évite de surestimer la précision du calcul.

Propagation des incertitudes Les incertitudes associées aux grandeurs mesurées se propagent au cours des calculs et affectent la précision du résultat final. Lorsque plusieurs grandeurs interviennent dans une expression, l'incertitude sur le résultat dépend à la fois des incertitudes individuelles et de la sensibilité du résultat à chacune de ces grandeurs. En pratique, une estimation raisonnable de l'incertitude permet de juger de la fiabilité du résultat et d'adapter le nombre de chiffres significatifs retenus.

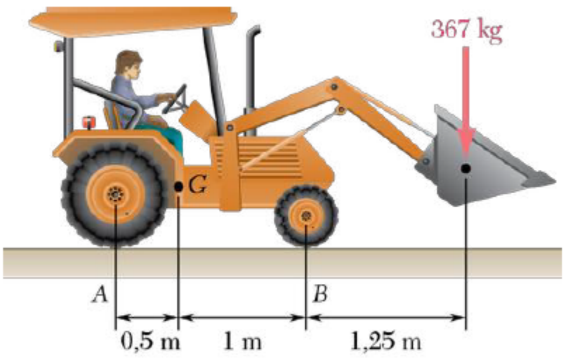
3.6 Exemples d'exercice

3.6.1 Démarche de résolution d'un exercice de statique du solide

1. **Modéliser** le système
2. **Vérifier** si le problème est isostatique (résolvable)
3. Pour chaque solide S_i, **sauf le bâti**
   (a) **Isoler** le solide S_i
   (b) **Lister** les forces extérieures à S_i (BAME)
   (c) **Formuler** (appliquer le PFS)
   (d) **Résoudre** (projeter les équations vectorielles dans une base)
4. **Analyser**

Remarque 3.2 *La démarche présentée est générale et constitue le fondement des logiciels de calcul. Néanmoins, il est également possible d'isoler des ensembles de solides afin d'éviter le calcul de certaines inconnues lors d'une résolution analytique.*

Tracteur

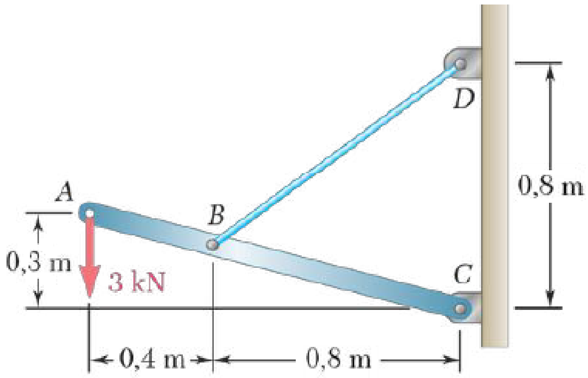


À l'aide d'un tracteur de masse 856 kg, on transporte une charge de gravier de masse 367 kg.

a) Calculer la réaction exercée sur chacune des roues A et B ;

b) Déterminer la masse maximale que peut transporter le tracteur.

Potence

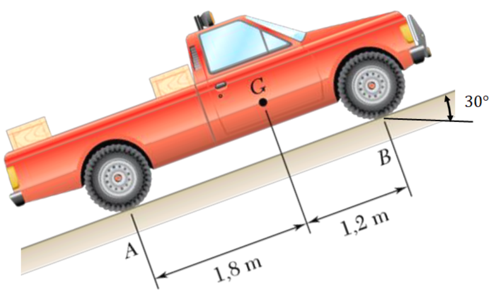


En vous référant à la barre illustrée, déterminer :

a) la tension dans la corde BD ;

b) la réaction au point C.

Camionnette stationnée en montée

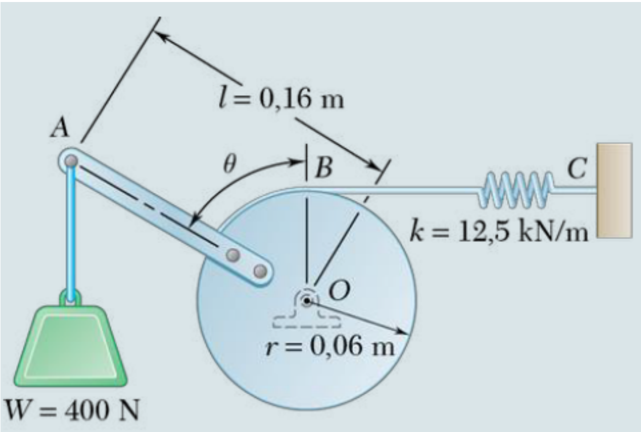


Une camionnette de masse 1400 kg est stationnée sur une route en pente. On note f_s le coefficient de frottement statique entre les pneus et la chaussée.

a) Déterminer les réactions normales exercées par la route sur les roues avant A et arrière B.

b) On donne le coefficient de frottement statique $f_s \approx 1$ sur route sèche et $f_s \approx 0{,}2$ sur route enneigée. La camionnette peut-elle rester immobile dans cette côte dans chacun de ces deux cas ? Commenter la validité physique des résultats.

Levier avec ressort



Un poids de 400 N est attaché à l'extrémité A du levier OA. La constante de raideur du ressort BC est $k = 12{,}5\,\mathrm{kN\,m^{-1}}$. Le ressort est à sa longueur naturelle lorsque $\theta = 0$.

a) Déterminer la position d'équilibre.

Deuxième partie

Mathématique pour la mécanique

Annexe A

Quelques éléments de géométrie vectorielle

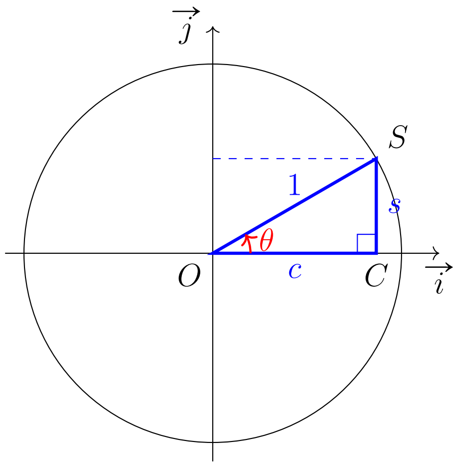
La géométrie n'est pas faite pour être apprise, elle est faite pour être utilisée.

– Seymour Papert
Mathématicien et informaticien au MIT, l'un des pionniers de l'I.A.

A.1 Trigonométrie

Cercle unitaire

Soit un cercle unitaire de centre O (et de rayon 1) et un triangle rectangle OCS.



$$\cos\theta = c, \quad \sin\theta = s \text{ et } \quad \tan\theta = \frac{s}{c} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

A.2 Les vecteurs

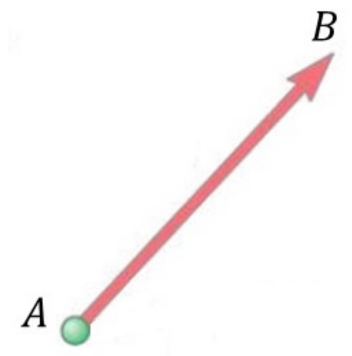


FIGURE A.1 – Vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

Définition

Un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ A et un point d'arrivée B. On définit un vecteur lié, par quatre caractéristiques

— une direction, la droite (AB)
— un sens, de A vers B
— une norme, la distance $d(A, B)$
— un point d'application, A

Décomposition d'un vecteur en norme et vecteur unitaire

Il est souvent utile d'exprimer un vecteur comme le produit de sa norme par un vecteur unitaire. Cette écriture permet de séparer clairement l'intensité de l'action mécanique de sa direction et de son sens.

Soit un vecteur non nul $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. On définit le *vecteur unitaire associé* $\overrightarrow{\mathbf{u_A}}$ comme le vecteur colinéaire à $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, de même direction et de même sens, et de norme égale à 1. Il est donné par :

$$\overrightarrow{\mathbf{u_A}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{A}}\right\|}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ peut alors s'écrire sous la forme :

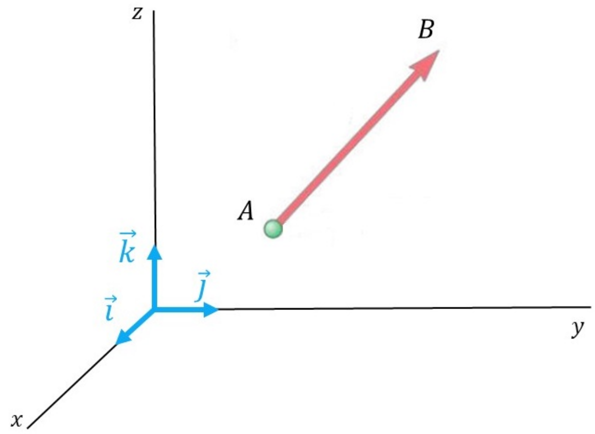
$$\overrightarrow{\mathbf{A}} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{A}}\right\| \overrightarrow{\mathbf{u_A}}. \tag{A.1}$$

Cette écriture est appelée *décomposition norme–direction* ou *écriture directionnelle d'un vecteur*. Elle met en évidence le fait que tout vecteur est entièrement défini par :

— sa norme, qui représente l'intensité de la grandeur physique associée ;
— sa direction et son sens, portés par le vecteur unitaire.

Cette représentation est particulièrement utile pour écrire les équations d'équilibre, car elle permet de dissocier clairement les inconnues scalaires (intensités) des directions géométriques imposées par le problème.

Coordonnés d'un vecteur



Base orthonormée

Dans l'espace vectoriel à trois dimensions, trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ indépendant forme une base $\mathcal{B}(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$.

En mécanique et plus généralement, nous utilisons principalement des bases orthonormées pour des raisons de simplicité. Une base orthonormée est par définitions une base où

— les vecteurs de la base sont unitaire

$$\left\|\vec{\mathbf{i}}\right\| = \left\|\vec{\mathbf{j}}\right\| = \left\|\vec{\mathbf{k}}\right\| = 1$$

— les vecteurs de la base sont perpendiculaire 2 à 2

$$\vec{\mathbf{i}} \perp \vec{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{j}} \perp \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{k}} \perp \vec{\mathbf{i}}$$

L'association d'un point O à cette base constitue un repère $\mathcal{R}(O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$.

Coordonnées d'un vecteur dans une base othonormée

Soit A et B ayant pour coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans le repère $\left(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$$

avec

$$X = x_B - x_A \qquad Y = y_B - y_A \qquad Z = z_B - z_A$$

Les vecteurs peuvent également être écrits en colonne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}_{\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)}$$

Remarque A.1 *Les composantes d'un vecteur dans une base donnée sont indépendantes du point d'origine choisi pour le représenter. Ainsi, le déplacement du point d'application d'un vecteur d'un point A vers un autre point C ne modifie ni sa direction, ni son sens, ni ses composantes dans la base considérée. Cette propriété traduit le caractère* libre *des vecteurs en mécanique et en mathématiques.*

Norme d'un vecteur

La norme (ou le module) d'un vecteur est la distance en entre l'origine et l'extrémité de ce vecteur. On note

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right\| = d\left(A, B\right) = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Dans une base orthonormée, on a

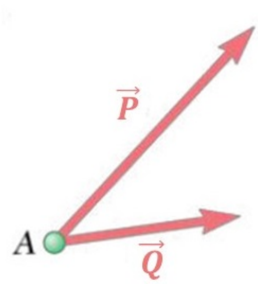
$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

où X, Y et Z sont les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

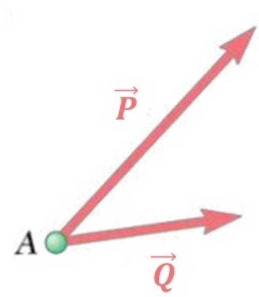
A.3 Somme de vecteurs

Construction géométrique

Somme de deux vecteurs

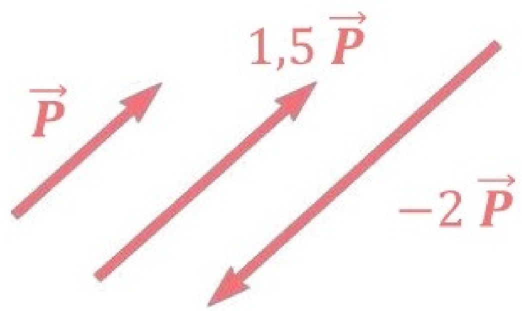


Règle du parallélogramme

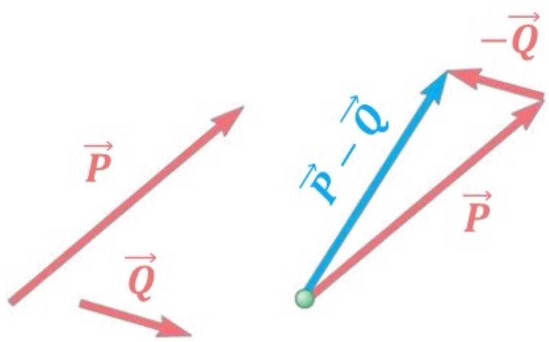


Méthode du triangle

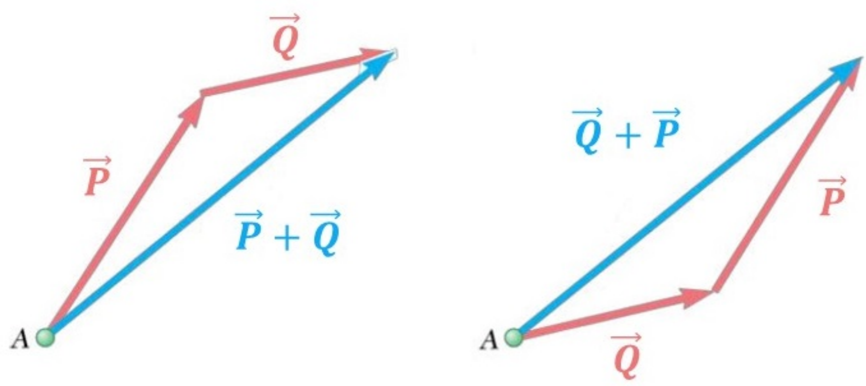
Produit par un scalaire



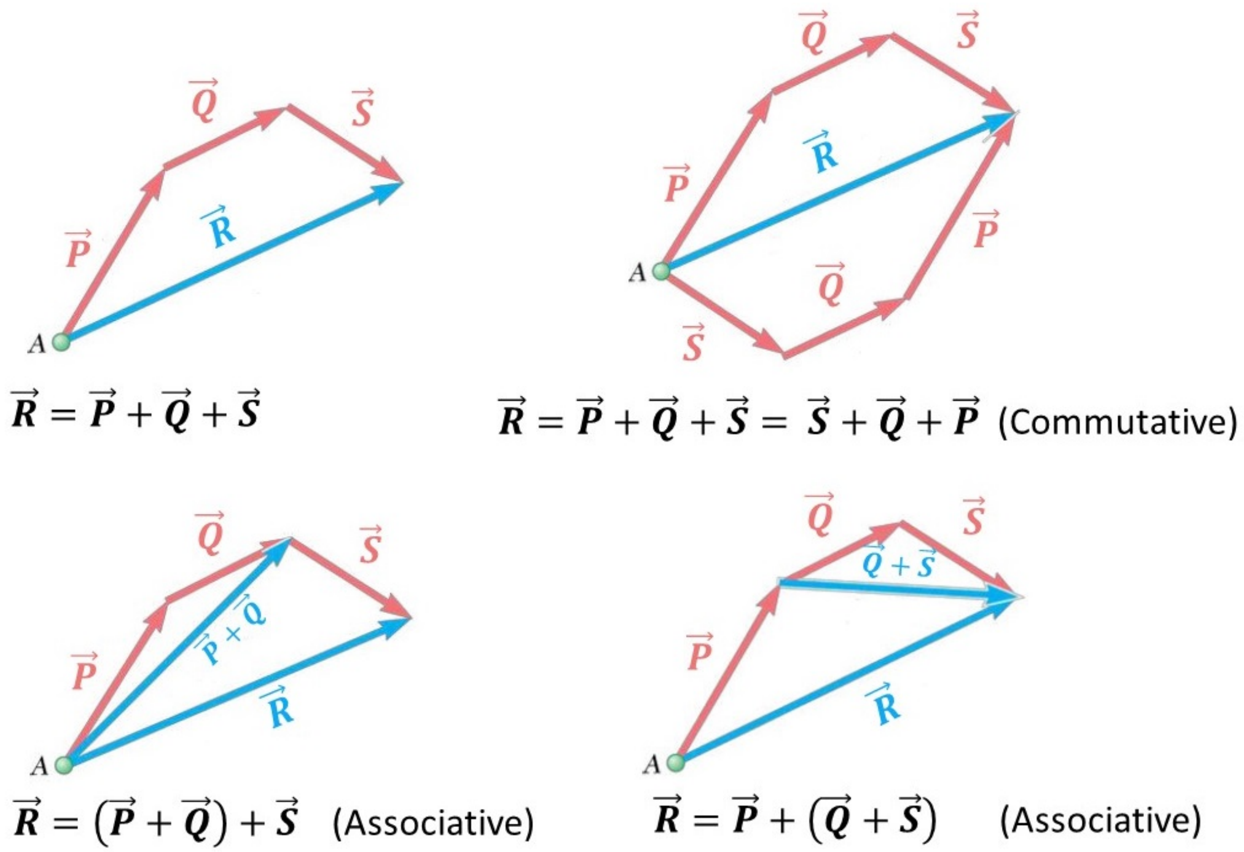
Propriétés



Soustraction : $\vec{P}-\vec{Q}=\vec{P}+\left(-\vec{Q}\right)$



$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{Q}+\vec{P}$ (Commutative)



Somme de vecteurs à l'aide des composantes

Soit une base $\mathcal{B}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$ orthonormée.

Somme de deux vecteurs

Soient $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ deux vecteurs exprimés dans la même base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$ tels que

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\vec{\mathbf{x}} + A_y\,\vec{\mathbf{y}} + A_z\,\vec{\mathbf{z}} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{B}} = B_x\,\vec{\mathbf{x}} + B_y\,\vec{\mathbf{y}} + B_z\,\vec{\mathbf{z}},$$

alors le vecteur somme $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ s'écrit :

$$\vec{\mathbf{C}} = (A_x + B_x)\,\vec{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\,\vec{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\,\vec{\mathbf{z}}.$$

Les composantes du vecteur somme sont donc obtenues par l'addition algébrique des composantes correspondantes des vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$:

$$C_x = A_x + B_x, \qquad C_y = A_y + B_y, \qquad C_z = A_z + B_z.$$

Produit par un scalaire

Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ alors le vecteur $\vec{\mathbf{D}} = \lambda\vec{\mathbf{A}}$ s'écrit :

$$\vec{\mathbf{D}} = (\lambda A_x)\,\vec{\mathbf{x}} + (\lambda A_y)\,\vec{\mathbf{y}} + (\lambda A_z)\,\vec{\mathbf{z}}.$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{D}}$ sont donc obtenues par la multiplication algébrique des composantes correspondantes du vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ par λ :

$$D_x = \lambda A_x, \qquad D_y = \lambda A_y, \qquad D_z = \lambda A_z.$$

Généralisation combinaison linéaire de vecteurs

Soient n vecteurs $\{\overrightarrow{\mathbf{F1}}, \overrightarrow{\mathbf{F2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{Fn}}\}$ et n scalaires $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$. On définit la résultante $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ comme la combinaison linéaire suivante

$$\overrightarrow{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{Fi}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{F1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{F2}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{Fn}}$$

alors les composantes de $\overrightarrow{\mathbf{R}} = R_x \overrightarrow{\mathbf{x}} + R_y \overrightarrow{\mathbf{y}} + R_z \overrightarrow{\mathbf{z}}$ dans la base $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$ sont

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Fi_x = \lambda_1 F1_x + \lambda_2 F2_x + \cdots + \lambda_n Fn_x$$
$$R_y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Fi_y = \lambda_1 F1_y + \lambda_2 F2_y + \cdots + \lambda_n Fn_y$$
$$R_z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Fi_z = \lambda_1 F1_z + \lambda_2 F2_z + \cdots + \lambda_n Fn_z$$

A.4 Angle orienté entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{v}}$. On appelle *angle orienté de* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vers* $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, et l'on note $(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$, le réel α tel que l'on obtienne le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ d'un angle α autour de leur origine commune.

Par convention, l'angle α est compté positivement dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) et négativement dans le sens horaire. Deux angles orientés qui diffèrent d'un multiple de 2π représentent le même angle orienté.

On note alors :

$$\alpha = (\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \quad [2\pi].$$

A.5 Produit scalaire

Définition

Le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel suivant noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. Symétrie : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
2. Linéarité : $\overrightarrow{u}.\left(\alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \alpha\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$

Expression analytique

Dans une repère orthonormée $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ de coordonnés (x_1, y_1, z_1) et $\overrightarrow{v_2}$ de coordonnées (x_2, y_2, z_2) s'écrit :

$$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Exemple

Soient deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}_1\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ et $\mathcal{B}_2\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$. La base $\mathcal{B}_2$ s'obtient de la base $\mathcal{B}_1$ par rotation d'angle θ_{12} autour du vecteur $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_{12}}$.

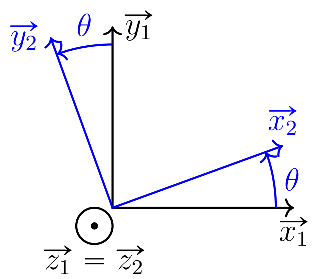


FIGURE A.2 – Figure de calcul

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_2} = \cos\theta & \overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{y_2} = -\sin\theta & \overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{z_{12}} = 0 \\
\overrightarrow{y_1}.\overrightarrow{x_2} = \sin\theta & \overrightarrow{y_1}.\overrightarrow{y_2} = \cos\theta & \overrightarrow{y_1}.\overrightarrow{z_{12}} = 0 \\
\overrightarrow{z_{12}}.\overrightarrow{x_2} = 0 & \overrightarrow{z_{12}}.\overrightarrow{y_2} = 0 & \overrightarrow{z_{12}}.\overrightarrow{z_{12}} = 1
\end{array}$$

Remarque A.2 *Pour éviter les erreurs de signes lors des projections (ou des calculs produits scalaires),* ***il est nécessaire de toujours représenter les figures de calculs dans la configuration de la figure*** **??**. *C'est-à-dire de placer ici le vecteur $\overrightarrow{x_2}$ dans le premier cadrant entre $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$, pour $\theta_{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

A.6 Produit vectoriel

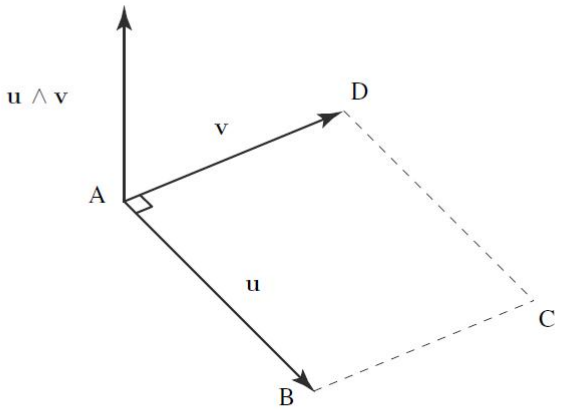


FIGURE A.3 – Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ tel que, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ soit perpendiculaire au plan $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, le trièdre $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ soit direct et la norme de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ soit égale a :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, |\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Interprétation géométrique

La norme du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, représente la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. Antisymétrie : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$
2. Linéarité : $\overrightarrow{u} \wedge (\alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$
3. Application à une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{0} & \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k} & \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \\
\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} & \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} & \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i} \\
\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j} & \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} & \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}
\end{array}$$

4. Double produit vectoriel (formule de Gibbs)

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}$$

Expression analytique

Dans une repère orthonormée $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{v_1}$ de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et $\vec{v_2}$ de coordonnées (x_2, y_2, z_2) s'écrit :

$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\,\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\,\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,\vec{k}$$

en notation colonne

$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \left|\begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{array}\right.$$

Et en utilisant le déterminant d'une matrice 3×3, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\,\vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\,\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\,\vec{k} \\
&= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\,\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\,\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple

On reprendre le même exemple que pour le produit scalaire, c'est-à-dire de deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}_1\left(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}\right)$ et $\mathcal{B}_2\left(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}\right)$ en rotation l'une par rapport à l'autre d'un angle θ autour du vecteur $\vec{z_{12}}$.

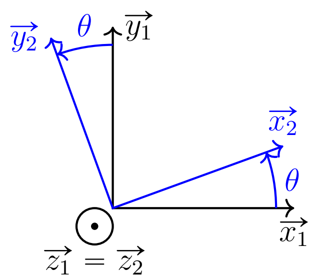


FIGURE A.4 – Figure de calcul

$\vec{x_1} \wedge \vec{x_2} = \sin\theta\, \vec{z_{12}}$	$\vec{x_1} \wedge \vec{y_2} = \cos\theta\, \vec{z_{12}}$	$\vec{x_1} \wedge \vec{z_{12}} = -\vec{y_1}$
$\vec{y_1} \wedge \vec{x_2} = -\cos\theta\, \vec{z_{12}}$	$\vec{y_1} \wedge \vec{y_2} = \sin\theta\, \vec{z_{12}}$	$\vec{y_1} \wedge \vec{z_{12}} = \vec{x_1}$
$\vec{z_{12}} \wedge \vec{x_2} = \vec{y_2}$	$\vec{z_{12}} \wedge \vec{y_2} = -\vec{x_2}$	$\vec{z_{12}} \wedge \vec{z_{12}} = \vec{0}$

A.7 Produit mixte

Définition

Le produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est le nombre réel suivant est note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$$

Interprétation géométrique

La valeur absolue du produit mixte $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ représente le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

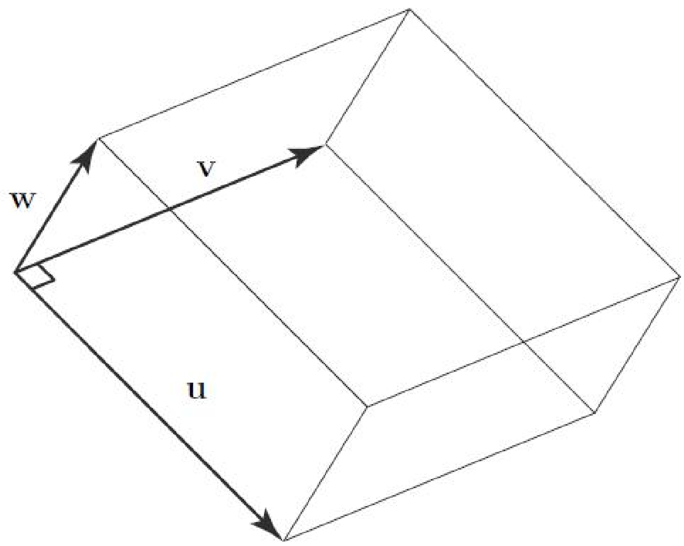


FIGURE A.5 – Produit mixte

Propriétés

1. Permutation des opérateurs : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$
2. Distributivité par rapport à l'addition : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$
3. Multiplication par un réel : $(\alpha\overrightarrow{u}, \beta\overrightarrow{v}, \gamma\overrightarrow{w}) = \alpha\beta\gamma(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$
4. Permutation des vecteurs : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$
5. Permutation circulaire : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$
6. Nullité dans le cas de vecteurs coplanaires : si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires alors

$$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = 0$$

Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le produit mixte des trois vecteurs $\vec{v_1}$ de composantes (x_1, y_1, z_1), $\vec{v_2}$ (x_2, y_2, z_2) et $\vec{v_3}$ (x_3, y_3, z_3) se calcule comme le déterminant suivant :

$$(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -x_3y_2z_1 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_1y_2z_3$$

A.8 Le torseur

Un **torseur** est un objet mathématique qui regroupe, dans une même écriture, deux grandeurs vectorielles définies en tout point de l'espace et liées entre elles par une relation de transport, appelée également formule de Varignon.

Un torseur $\{\mathcal{T}\}$ est constitué :

— d'un **vecteur résultant** $\vec{\mathbf{R}}$, indépendant du point de réduction ;

— d'un **moment** $\vec{\mathbf{M}}(A)$ défini en un point A quelconque.

Ces deux objets sont liés par la formule de transport ou formule de Varignon :

$$\vec{\mathbf{M}}(B) = \vec{\mathbf{M}}(A) + \vec{\mathbf{BA}} \wedge \vec{\mathbf{R}},$$

qui exprime la manière dont le moment se transforme lorsque l'on change de point de réduction. Cette relation caractérise la structure d'un champs de vecteur affine $\vec{\mathbf{M}}(P)$ de dimension trois, dirigée par le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{\mathbf{R}}$ via le produit vectoriel.

En d'autres termes, le champ de moments d'un torseur :

— tourne autour de la résultante

— croît linéairement avec la distance au point de réduction,

— forme un **faisceau de moments** autour d'une droite appelée ligne de glissement (là où le moment est minimal)

— Si $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$, le champ devient constant (torseur couple).

Cette structure en fait un outil particulièrement adapté pour modéliser les grandeurs distribuées dans l'espace de la mécanique du solide indéformable comme les actions mécaniques :

$$_A\left\{2 \to 1\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \vec{\mathbf{F}}(2 \to 1) \\ \vec{\mathbf{M}}(A; 2 \to 1) \end{array}\right\}$$

Opérations sur les torseurs

Soient deux torseurs exprimés au point A

$$_A\left\{\mathcal{T}_1\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}}_1 \\ \vec{\mathbf{M}}_1(A) \end{array}\right\}, \qquad \text{et} \quad {}_A\left\{\mathcal{T}_2\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}}_2 \\ \vec{\mathbf{M}}_2(A) \end{array}\right\}$$

Addition :

$$\underset{A}{\left\{\mathcal{T}_1\right\}} + \underset{A}{\left\{\mathcal{T}_2\right\}} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{l}\vec{\mathbf{R}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 \\ \vec{\mathbf{M}}_1(A) + \vec{\mathbf{M}}_2(A)\end{array}\right\}}$$

Les deux torseurs doivent être exprimé au même point A pour être additionnés.

Décomposition : Tout torseur peut se décomposer comme un torseur couple et un glisseur

$$\underset{A}{\left\{\mathcal{T}\right\}} = \underset{A}{\left\{\mathcal{C}\right\}} + \underset{A}{\left\{\mathcal{G}\right\}}$$

avec le torseur couple invariant par changement de point

$$\left\{\mathcal{C}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{C}}\end{array}\right\}$$

où $\vec{\mathbf{C}} = (\vec{\mathbf{M}}(A) \cdot \vec{\mathbf{n}}_R)\vec{\mathbf{n}}_R$ est la projecteur du moment suivant la direction de la résultante $\vec{\mathbf{n}}_R = \vec{\mathbf{R}}/\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|$ et avec le torseur glisseur s'écrivant

$$\underset{A}{\left\{\mathcal{G}\right\}} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{l}\vec{\mathbf{R}} \\ \vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{G}}(A) = \vec{\mathbf{M}}(A) - \vec{\mathbf{C}}\end{array}\right\}}$$

Pour trouver l'axe du glisseur $(B, \vec{\mathbf{n}}_R)$, il suffit de trouver un point B tel que

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{G}}(B) = \vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{G}}(A) + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$