

# Approche phénoménologique de la viscoélasticité linéaire

Fabrice Detrez, MSME, Univ Gustave Eiffel

Objectifs pédagogiques :

- Modèles rhéologiques usuels
- Schémas rhéologiques
- Calcul de la réponse temporelle du modèle de Zener
- Calcul de la réponse fréquentielle du modèle de Zener
- Identification des modèles viscoélastiques linéaires

Le fondement de l'approche phénoménologique est d'exprimer mathématiquement le résultat d'essais mécaniques sans s'attarder sur ces mécanismes physico-chimiques sous-jacents. Dans le cadre l'étude du comportement mécanique des matériaux, l'objectif est de déterminer le lien entre la contrainte  $\sigma(t)$  et la déformation  $\varepsilon(t)$  reproduisant les résultats d'essais mécaniques. Ceci permet à l'ingénieur de concevoir de nouvelles pièces et prédire leurs tenues mécaniques. D'un point de vue académique, cela permet de découpler les effets viscoélastiques pour étudier et d'identifier d'autres phénomènes anélastiques tels que la plasticité et l'endommagement (Detrez et al 2011).

La théorie de la viscoélasticité linéaire est utilisée dans de nombreux domaines allant de la physico-chimie des polymères (Halary et al 2015, S. Etienne et L. David 2002, Kausch 2001) à la mécanique des matériaux (Lemaitre et al 2009, Gremaud 2013) en passant par l'acoustique (Bourbié et al 1986), la rhéologie des fluides complexes (Oswald 2005, Coussot 2012) et les mousses (Cantat et al 2010). Le lecteur intéressait par la formulation

de la viscoélasticité linéaire dans le cadre thermodynamique pourra se référer à (Nguyen 2000). Je conseille la lecture de (Chamoin 2007, Simo et Hughes 2006, Yvonnet 2019) pour ceux qui veulent de plus amples informations sur l'implémentation de ces modèles dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Dans ce chapitre, j'utiliserai une démarche pédagogique déductive en étudiant en détail le modèle de Zener qui est l'archétype du solide viscoélastique. Puis, je présenterai quelques règles pratiques relatives à l'utilisation des modèles viscoélastiques ; avant de finir en présentant les principes généraux de la viscoélasticité. Avant cela, je rappellerai quelques prérequis de rhéologie tels que les différents états de la matière condensées et les schémas rhéologiques.

## 1 Les différents états de la matière condensée : liquide, solide et matière molle

Aux températures usuelles, les matériaux polymères sont sous forme condensée, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas sous forme de gaz ou de plasma. Les deux états principaux de la matière condensée sont l'état liquide et l'état solide.

### 1. Les liquides visqueux

Un liquide ne conserve pas sa forme sous l'action de l'apesanteur, c'est-à-dire que sa forme va s'adapter à son contenant. Ceci est dû au fait qu'il n'a pas la capacité de résister aux cisaillements.

Il est possible de les faire couler en les versant d'un contenant à l'autre. L'expérience nous montre que tous les liquides ne s'écoulent pas à la même vitesse. Par exemple vider un verre d'eau prend moins d'une seconde alors que vider un pot de miel prend plusieurs minutes. La forme du miel changera beaucoup moins vite que celle de l'eau, car le miel est plus visqueux que l'eau. Par conséquent, la viscosité d'un liquide est une propriété intrinsèque caractérisant sa capacité à résister à l'écoulement.

Dans un liquide, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est reliée à la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$  par la loi de Norton :

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (1)$$

où le  $\eta$  est la viscosité du fluide qui a pour unité le poiseuille  $[Pi] = [Pa \cdot s]$ .

### 1.1 Les solides élastiques

Un matériau à l'état solide est capable de conserver sa forme au cours du temps. En outre, il résiste aux contraintes en se déformant avant de retrouver une forme stable dès qu'il n'est plus sollicité.

Le solide élastique est un solide idéal qui retrouvera instantanément sa forme initiale sans dissiper d'énergie dès qu'il ne subit plus de contrainte mécanique.

Pour les solides élastiques linéaires, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est proportionnelle au cisaillement  $\gamma$  :

$$\tau = G\gamma \quad (2)$$

où  $G$  est le module de cisaillement qui est usuellement donné en méga-pascal  $[MPa] = [N \cdot mm^{-2}]$ .

Le Tableau 1 présente les différences notables entre les solides élastiques et les fluides visqueux

Tableau 1 Comparatif des propriétés des fluides visqueux et des solides élastiques.

Fluide visqueux	Solide élastique
Prend la forme de son contenant au repos	Conserve sa forme au repos
Se déforme indéfiniment sous l'action d'une contrainte de cisaillement	Résiste à une contrainte de cisaillement en se déformant
Contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation $\tau = \eta \dot{\gamma}$	Contrainte proportionnelle à la déformation $\sigma = E\varepsilon$ (en traction) $\tau = G\gamma$ (en cisaillement)
Dissipe l'énergie mécanique en se déformant	Stocke l'énergie mécanique en se déformant Il est capable de rebondir Retrouve instantanément sa forme initiale lorsqu'on relâche la sollicitation mécanique
Distance moyenne entre 2 atomes $\approx 1$ à $2 \text{ \AA}$	Distance moyenne entre 2 atomes $\approx 1$ à $2 \text{ \AA}$

Atomes sont mobiles ; ils peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres	Atomes occupent des positions relatives fixes
Peut se recoller lorsqu'il est coupé	Une fois coupé, il ne peut pas se recoller

## 1.2 La matière molle

Le comportement mécanique des polymères (fondu, en solution ou à l'état solide) se trouve entre le solide élastique et le fluide visqueux, on parlera de **matière molle**. Elle se divise en deux classes. Premièrement, nous trouverons des fluides qui s'écoulent très lentement capables rebondir comme les solides élastiques ; que nous appellerons alors fluides viscoélastiques. Puis, il y a les solides viscoélastiques qui auront un comportement mécanique dépendant de la vitesse et qui sont capables de dissiper de l'énergie.

Pour les fluides viscoélastiques, le choix du modèle rhéologique dépendra du **nombre de Deborah**,  $D_e = \tau_c/t_{exp}$ , qui est défini comme le rapport entre le temps de relaxation caractéristique du matériau,  $\tau_c$ , et le temps caractéristique de l'expérience,  $t_{exp}$  :

- $D_e \ll 1$  le matériau se comporte comme un solide élastique, les phénomènes visqueux peuvent être négligés
- $D_e \sim 1$  le matériau a un comportement viscoélastique
- $D_e \gg 1$  le matériau se comporte comme un fluide visqueux

L'influence du nombre de Deborah sur la rhéologie de solides viscoélastiques sera commentée à la **section 3.2**.

L'ensemble des concepts et outils mathématiques, que nous présenterons dans ce chapitre sur les solides viscoélastiques, peuvent être également utilisés pour l'ensemble de la matière molle dans le domaine linéaire.

## 2 Schémas rhéologiques

Nous utilisons souvent les schémas rhéologiques, comme supports de la pensée, pour décrire le comportement mécanique des polymères solides. Ces diagrammes sont des

assemblages plus ou moins sophistiqués de deux éléments : le ressort et l'amortisseur visqueux (Figure 1).

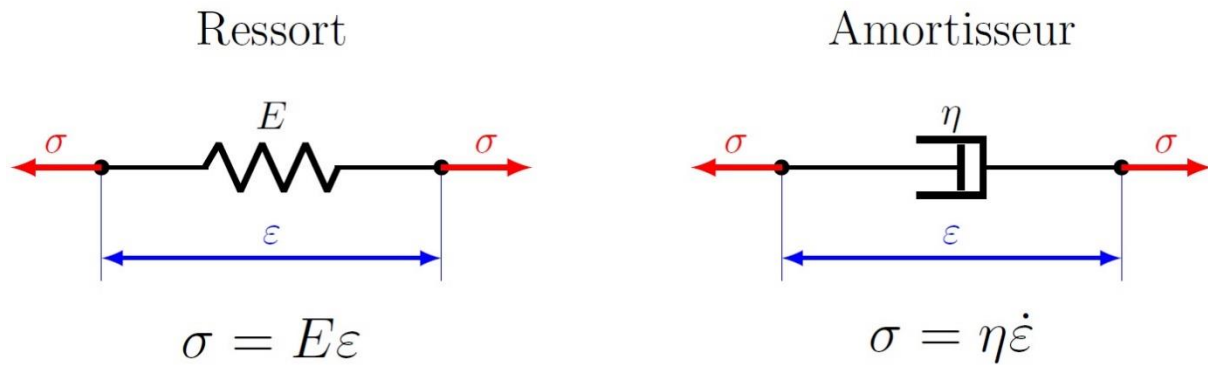


Figure 1 Eléments rhéologiques de bases

Par souci de clarté et de simplicité, nous plaçons dans le cadre d'une sollicitation unidimensionnelle de traction. Nous désignons par  $\sigma$  la contrainte agissant sur l'élément rhéologique et par  $\varepsilon$  sa déformation. La loi de comportement pour le ressort, archétype du solide élastique, est :

$$\sigma = E\varepsilon$$

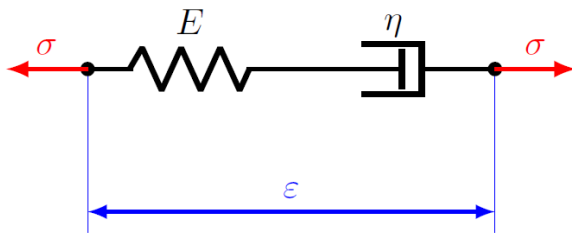
où  $E$  est le module d'Young qui est usuellement donné en méga-pascal [ $MPa$ ] = [ $N.mm^{-2}$ ].

Et pour l'amortisseur visqueux, archétype du fluide visqueux :

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$$

A l'instar des schémas électriques, il existe deux façons d'assembler les éléments rhéologiques : soit en série soit en parallèle (Figure 2).

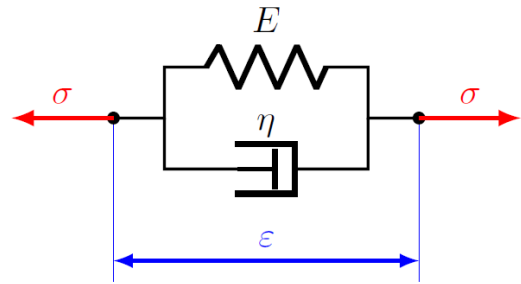
### Modèle de Maxwell



$$\sigma + \tau \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{\eta}{E}$$

### Modèle de Kelvin-Voigt



$$\varepsilon + \bar{\tau} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \sigma$$

$$\text{avec } \bar{\tau} = \frac{\eta}{E}$$

Figure 2 Assemblage d'un ressort et d'un amortisseur en série (Modèle de Maxwell) et en parallèle (Modèle de Kelvin-Voigt).

Voici les règles de ce jeu d'assemblage :

**Assemblage en série :** la contrainte est conservée le long d'un fil et les déformations s'ajoutent

$$\varepsilon_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad \sigma_t = \sigma_1 = \sigma_2. \quad (3)$$

**Assemblage en parallèle :** les contraintes s'ajoutent et les déformations sont égales de part et d'autre des branches parallèles

$$\varepsilon_t = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad \sigma_t = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (4)$$

#### Exemple :

Nous cherchons à trouver l'équation qui relie la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$  pour le modèle Kelvin-Voigt où un ressort et un amortisseur visqueux sont assemblés en parallèle (Figure 2).

Nous commençons par écrire la contrainte totale comme la somme de la contribution des deux branches parallèles

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

Ensuite, nous injectons les lois de comportement du ressort ( $\sigma_1 = E\varepsilon_1$ ) et de l'amortisseur visqueux ( $\sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2$ ) dans cette expression :

$$\sigma = E\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_2$$

Et finalement, nous utilisons l'égalité des déformations des deux branches parallèles  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$  pour obtenir l'équation différentielle qui régit le comportement viscoélastique du modèle Kelvin-Voigt

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

En introduisant la constante  $\bar{\tau} = \frac{\eta}{E}$  qui est homogène à un temps, nous retrouvons l'expression de la Figure 2, à savoir

$$\frac{1}{E}\sigma = \varepsilon + \bar{\tau}\dot{\varepsilon}$$

Le cas d'un assemblage en série d'un ressort et d'un amortisseur visqueux (**Modèle de Maxwell**) est laissé en exercice au lecteur.

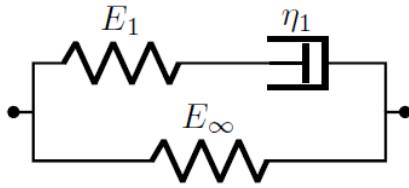
La **Figure 3** présente les quatre modèles viscoélastiques linaires les plus simples pour les fluides et solides. Dans cette figure nous avons associé au schéma rhéologique l'équation différentielle décrivant le comportement mécanique. L'intérêt des schémas rhéologiques est ici frappant, car il est bien plus simple de réfléchir à l'aide de schéma que directement avec les équations différentielles. Le **modèle de Zener** (« **Standard Linear Solid model** » en anglais) est traité en détail dans la section suivante.

---

Modèle de Zener ou *Standard Linear Solid (SLS) model*

---

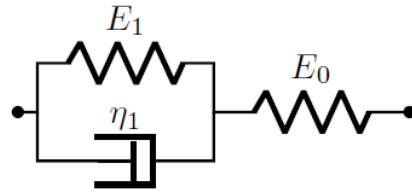
Type 1



$$\sigma + \tau \frac{d\sigma}{dt} = E_{\infty} \varepsilon + \tau (E_{\infty} + E_1) \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{\eta_1}{E_1}$$

Type 2



$$\frac{E_1 + E_0}{E_1 E_0} \sigma + \frac{\bar{\tau}}{E_0} \frac{d\sigma}{dt} = \varepsilon + \bar{\tau} \frac{d\varepsilon}{dt}$$

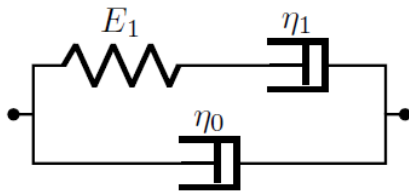
$$\text{avec } \bar{\tau} = \frac{\eta_1}{E_1}$$

---

Modèle de Jeffrey ou *Standard Linear Fluid (SLF) model*

---

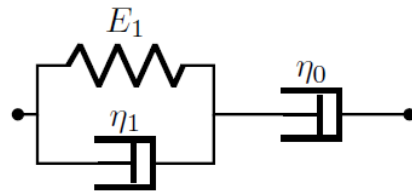
Type 1



$$\sigma + \tau \frac{d\sigma}{dt} = (\eta_1 + \eta_0) \frac{d\varepsilon}{dt} + \tau \eta_0 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{\eta_1}{E_1}$$

Type 2



$$\frac{1}{\eta_{\infty}} \sigma + \frac{\eta_1 + \eta_{\infty}}{\eta_1 \eta_{\infty}} \bar{\tau} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + \bar{\tau} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

$$\text{avec } \bar{\tau} = \frac{\eta_1}{E_1}$$

Figure 3 Modèles viscoélastiques standards à un temps de relaxation de solide et de fluide.

**Remarque :** Bien que les temps caractéristiques  $\tau$  et  $\bar{\tau}$  des deux types de modèles de Zener aient la même expression mathématique, ils n'ont pas la même signification physique. Le premier,  $\tau$ , est un **temps de relaxation** qui caractérise le temps de retour vers la position d'équilibre du modèle. Le second,  $\bar{\tau}$ , est le **temps de retard élastique** qui désigne le temps caractéristique pour atteindre l'état stationnaire lors d'un essai de fluage. Dans le cas du modèle de Zener de type 1, la relation entre ces deux temps est  $(E_1 + E_{\infty})\tau = E_{\infty}\bar{\tau}$ . Il est intéressant de noter que les deux types de modèles de Zener sont équivalents.

### 3 Modèle de Zener ou Standard Linear Solid (SLS) model

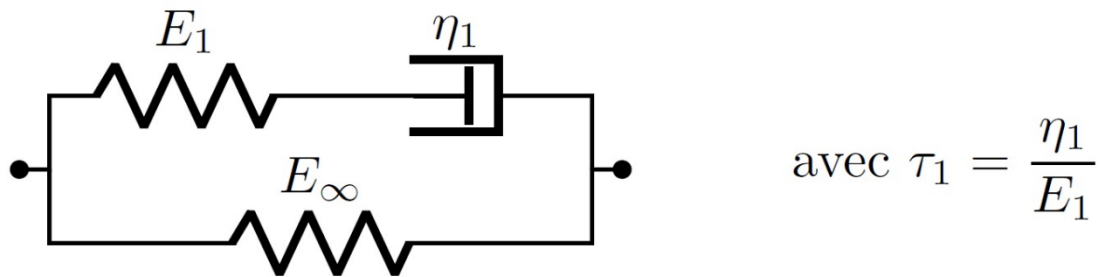


Figure 4 Schéma rhéologique du modèle de Zener.

Le **modèle de Zener** est l'archétype du solide visco-élastique linéaire. Il sert de base à la construction des modèles plus sophistiqués. Il se compose d'une branche élastique avec ressort de raideur  $E_\infty$  et d'une branche dite de Maxwell où un ressort de raideur  $E_1$  et en série avec un patin de viscosité  $\eta_1$ .

Dans cette section, nous allons établir l'équation différentielle reliant la contrainte à la déformation. Puis nous étudierons sa réponse temporelle pour des essais de traction, de relaxation et de charge-décharge. Finalement, nous déterminerons sa réponse harmonique utile pour l'analyse des essais de DMTA (**cf. Chapitre Noëlle**).

#### 3.1 Loi de comportement du modèle de Zener

Puisque le schéma rhéologique du modèle de Zener comporte deux branches parallèles, nous pouvons écrire la contrainte  $\sigma$  comme la somme des contraintes dans chacune des branches :

$$\sigma = \sigma_\infty + \sigma_1,$$

où  $\sigma_\infty$  est la contrainte dans la branche élastique et  $\sigma_1$  est la contrainte dans la branche de Maxwell.

La déformation dans la branche élastique  $\varepsilon_\infty$  et dans la branche de Maxwell  $\varepsilon_1$  sont identiques, car elles sont parallèles dans le schéma rhéologique :

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

De plus, elles sont égales à la déformation totale  $\varepsilon$ .

La loi de comportement associée au ressort de la branche élastique, permet de relier la contrainte élastique à la déformation totale :

$$\sigma_{\infty} = E_{\infty} \varepsilon_{\infty} = E_{\infty} \varepsilon.$$

La loi de comportement associée à la branche de Maxwell est donnée par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{1}{\tau_1} \sigma_1 = E_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt} = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (5)$$

Avec comme condition initiale  $\sigma_1(t = 0) = 0$ . Cette loi de comportement s'obtient en décomposant la déformation dans la branche de Maxwell en un terme purement élastique associé au ressort de raideur  $E_1$  et un terme purement visqueux associé au patin de viscosité  $\eta_1$  ; puis en imposant l'égalité des contraintes dans ces deux éléments rhéologiques.

La loi de comportement viscoélastique du modèle de Zener s'obtient en dérivant par rapport au temps la décomposition des contraintes

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_{\infty}}{dt} + \frac{d\sigma_1}{dt}$$

Puis en utilisant, les lois de comportement de chacune des branches

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_{\infty} \frac{d\varepsilon_{\infty}}{dt} + E_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt} - \frac{1}{\tau_1} \sigma_1$$

L'étape suivante consiste à utiliser la relation reliant les déformations ( $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_{\infty}$ ) et celle reliant les contraintes ( $\sigma = \sigma_{\infty} + \sigma_1$ ) :

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_{\infty} \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{\tau_1} (\sigma - \sigma_{\infty})$$

Finalement, en utilisant une nouvelle fois la loi de comportement ( $\sigma_{\infty} = E_{\infty} \varepsilon$ ), on obtient après avoir regroupé les termes de contrainte dans le membre de gauche et avoir multiplié par  $\tau_1$  la même équation différentielle que sur la **Figure 3** :

$$\sigma + \tau_1 \frac{d\sigma}{dt} = E_\infty \varepsilon + (E_\infty + E_1) \tau_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (6)$$

**Remarque :** Dans la plupart des cas, nous n'utiliserons pas cette équation différentielle. Dans la suite nous travaillerons plutôt avec le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sigma &= \sigma_\infty + \sigma_1 \\ \sigma_\infty &= E_\infty \varepsilon \\ \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{1}{\tau_1} \sigma_1 &= E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \end{cases} \quad (7)$$

Bien que remplacer une équation différentielle par trois équations différentielles semble plus compliquer à première vue, cette écriture présente deux avantages lorsque nous utilisons la déformation comme entrée du modèle :

- i. la réponse en contrainte est la somme de deux contributions classiques : une qui correspond à la réponse quasi-statique,  $\sigma_\infty$ , modélisée par le ressort  $E_\infty$  ; et l'autre viscoélastique à un temps de relaxation,  $\sigma_1$ , modélisée par une branche de Maxwell ;
- ii. on évite des calculs pour obtenir l'équation globale et donc on évite des sources d'erreur. Ce point est d'autant plus important lorsque la complexité du modèle rhéologique augmente, c'est-à-dire lorsque la contribution visqueuse présente plusieurs temps de relaxations (modèle de Maxwell généralisé).

Dans le cas où nous souhaitons piloter le modèle en contrainte, nous préférons l'utilisation du modèle de Zener de type 2 et de son extension le modèle Kelvin-Voigt généralisé (cf. section 4.1).

### 3.2 Réponse temporelle du modèle de Zener de type 1

Dans cette partie, nous allons étudier en détail la réponse du modèle de Zener de type 1 à une rampe en déformation. Ce résultat fondamental, nous servira à construire, à l'aide du

principe de superposition, la réponse de ce modèle pour un essai de relaxation et un essai cyclique de charge-décharge.

### 3.2.1 Rampe de déformation

Une rampe en déformation (Figure 5a) est définie par l'expression :

$$\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 t \mathcal{H}(t) \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

où  $\mathcal{H}(t)$  est la fonction échelon unitaire, appelée également fonction de Heaviside, et  $\dot{\varepsilon}_0$  la vitesse de déformation qui est homogène à l'inverse d'un temps.

Pour trouver la réponse du modèle de Zener à une rampe, il faut résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_\infty &= E_\infty \dot{\varepsilon}_0 t \mathcal{H}(t), \\ \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{1}{\tau_1} \sigma_1 &= E_1 \dot{\varepsilon}_0 \mathcal{H}(t), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes :  $\sigma_\infty = \sigma_1 = 0$  pour  $t = 0$ . Ces conditions initiales, indispensables à la résolution, proviennent de l'hypothèse qu'il n'existe pas de contrainte dans l'état non-déformé et totalement relaxé. La solution de ce problème est :

$$\begin{aligned} \sigma_\infty(t) &= E_\infty \dot{\varepsilon}_0 t \mathcal{H}(t), \\ \sigma_1(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \tau_1 E_1 \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right) \mathcal{H}(t). \end{aligned}$$

On en déduit la contrainte totale,  $\sigma(t) = \sigma_\infty + \sigma_1$

$$\sigma(t) = \left( E_\infty \dot{\varepsilon}_0 t + E_1 \tau_1 \dot{\varepsilon}_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] \right) \mathcal{H}(t). \quad (10)$$

Nous pouvons constater un point intéressant, qui se généralise à tous les modèles viscoélastiques linéaires est que la réponse temporelle en contrainte du matériau est proportionnelle à la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}_0$ . Ceci nous permet de définir une fonction caractéristique du matériau indépendante de la vitesse de chargement

$$\sigma^{cr}(t) = \frac{\sigma(t)}{\dot{\epsilon}_0} = \left( E_\infty t + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] \right) \mathcal{H}(t). \quad (11)$$

Dans la suite, nous appellerons la fonction  $\sigma^{cr}(t)$  la réponse caractéristique à une rampe.

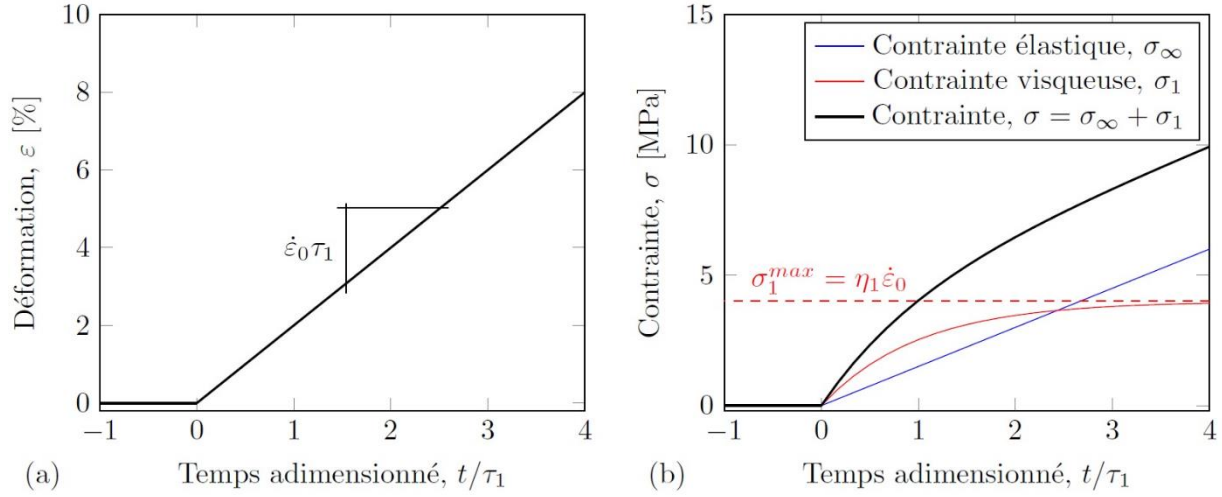


Figure 5 a) Evolution de la déformation totale  $\varepsilon$  en fonction du temps adimensionné ( $\tau_1 = 1$ s) pour une rampe de déformation ( $\dot{\epsilon}_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ); b) Evolution de la contrainte en fonction du temps adimensionné pour le modèle de Zener ( $E_\infty = 75 \text{ MPa}$ ,  $E_1 = 200 \text{ MPa}$ ,  $\eta_1 = 200 \text{ MPa.s}$ ) soumis à une rampe de déformation ( $\dot{\epsilon}_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ).

La **Figure 5b** représente l'évolution temporelle de ces trois contraintes en fonction du temps adimensionné  $t/\tau_1$ . La contrainte  $\sigma_\infty$  correspond à la réponse quasi-statique qui est proportionnelle à la déformation, elle évolue donc linéairement avec le temps avec une pente proportionnelle au produit  $E_\infty \dot{\epsilon}_0$ . La contrainte  $\sigma_1$  initialement nulle évolue jusqu'à atteindre un plateau,  $\sigma_1^{max} = \dot{\epsilon}_0 \eta_1$ , proportionnel à la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_0$  et à la viscosité  $\eta_1$ . La pente à l'origine de la contrainte  $\sigma_1$  est proportionnelle au module  $E_1$ . A l'instant  $t = \tau_1$ , la contrainte  $\sigma_1$  atteint 63% de sa valeur maximale,  $\sigma_1^{max}$ , et 95% de  $\sigma_1^{max}$  pour  $t = 3\tau_1$ . En constatant que  $\sigma_1^{max} = \dot{\epsilon}_0 \tau_1 E_1$  est proportionnel au produit  $\dot{\epsilon}_0 \tau_1$ , nous voyons immédiatement que sa contribution est négligeable aux très faibles vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}_0 \ll \frac{1}{\tau_1}$ . On se trouve dans le régime quasi-statique.

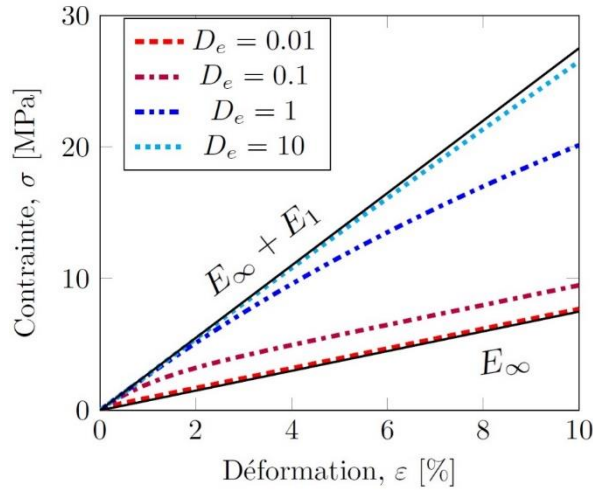


Figure 6 Courbes de traction pour le modèle de Zener ( $E_\infty = 75$  MPa,  $E_1=200$  MPa,  $\tau_1 = 1$  s) pour différents nombre de Deborah  $D_e = \tau_1/t_{exp}$  ; où le temps caractéristique de l'expérience  $t_{exp} = \varepsilon_{max}/\dot{\varepsilon}_0$ .

Pour discuter de l'influence de la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}_0$ , nous utilisons le nombre de Deborah  $D_e = \tau_1/t_{exp}$  ; où le temps caractéristique de l'expérience  $t_{exp} = \varepsilon_{max}/\dot{\varepsilon}_0$  est le temps pour atteindre la déformation maximale  $\varepsilon_{max}$ . Dans notre exemple de la [Figure 6](#), nous choisissons  $\varepsilon_{max} = 10\%$ . Quelle que soit la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}_0$ , toutes les courbes contrainte déformation se trouvent entre les deux droites de pente  $E_\infty$  et  $(E_1 + E_\infty)$ . La droite de pente  $E_\infty$  correspond au cas quasi-statique où la vitesse tend vers 0 ( $\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0$  et  $D_e \rightarrow 0$ ), où seule la branche élastique est active. La courbe de pente  $(E_1 + E_\infty)$  correspond au cas limite des très grandes vitesses de déformation ( $\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow \infty$  et  $D_e \rightarrow \infty$ ), dans ce cas l'amortisseur visqueux de la branche de Maxwell ne se déforme pas, le modèle de Zener est équivalent à deux ressorts élastiques en parallèle.

### 3.2.2 Essai de relaxation

#### Démarche pour trouver la réponse en relaxation

- ① Décomposition de la déformation  $\implies$  ② Utilisation du principe de superposition

$$\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 t \mathcal{H}(t) - \dot{\varepsilon}_0 (t - t_1) \mathcal{H}(t - t_1)$$

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon}_0 \sigma^{(cr)}(t) - \dot{\varepsilon}_0 \sigma^{(cr)}(t - t_1)$$

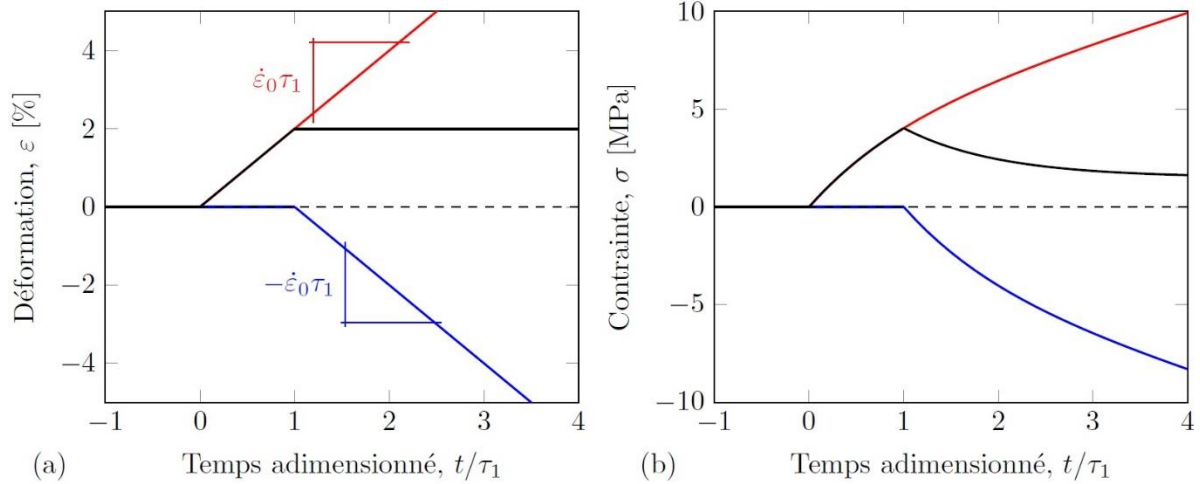


Figure 7 a) Evolution de la déformation totale  $\varepsilon$  en fonction du temps adimensionné ( $\tau_1 = 1$  s) pour un essai de relaxation à la déformation imposée  $\varepsilon_r = 2\%$  avec une vitesse de chargement ( $\dot{\varepsilon}_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ); b) Evolution de la contrainte en fonction du temps adimensionné pour le modèle de Zener ( $E_\infty = 75 \text{ MPa}$ ,  $E_1 = 200 \text{ MPa}$ ,  $\tau_1 = 1$  s) soumis à un essai de relaxation ( $\varepsilon_r = 2\%$ ,  $\dot{\varepsilon}_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ );

L'essai de relaxation (Figure 7) consiste à suivre l'évolution de la contrainte en fonction du temps pour le trajet de déformation donné par

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_0 t \mathcal{H}(t) & t < t_1 = \frac{\varepsilon_r}{\dot{\varepsilon}_0} \\ \varepsilon_r & t \geq t_1 \end{cases} \quad (12)$$

Cet essai est entièrement défini par deux paramètres : la vitesse de chargement  $\dot{\varepsilon}_0$  et la déformation imposée  $\varepsilon_r$ .

Pour calculer la réponse en contrainte du modèle Zener, nous allons utiliser le principe de superposition qui découle de la linéarité de ce modèle (cf. section 5.1). Pour parvenir au résultat, nous réécrivons la déformation sous la forme de la superposition de deux rampes (Figure 7a)

$$\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 t \mathcal{H}(t) - \dot{\varepsilon}_0 (t - t_1) \mathcal{H}(t - t_1). \quad (13)$$

La première rampe,  $\dot{\varepsilon}_0 t \mathcal{H}(t)$ , correspond à la phase de chargement et la seconde retardée de  $t_1$ ,  $-\dot{\varepsilon}_0(t - t_1)\mathcal{H}(t - t_1)$ , vient compenser la première pour créer le palier de déformation.

L'expression de la contrainte en découle immédiatement en utilisant la réponse caractéristique à une rampe (Eq. 11)

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \sigma^{cr}(t) - \dot{\varepsilon}_0 \sigma^{cr}(t - t_1) \\ \sigma(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left( E_\infty t + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] \right) \mathcal{H}(t) \\ &\quad - \dot{\varepsilon}_0 \left( E_\infty (t - t_1) + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau_1}\right) \right] \right) \mathcal{H}(t - t_1)\end{aligned}$$

Pour mettre en évidence la réponse lors de la charge et celle lors de la relaxation, nous pouvons écrire la contrainte sous la forme

$$\sigma(t) = \begin{cases} E_\infty \dot{\varepsilon}_0 t + E_1 \tau_1 \dot{\varepsilon}_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] & t < t_1 \\ E_\infty \varepsilon_r + E_1 \tau_1 \dot{\varepsilon}_0 \left[ \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] & t \geq t_1 \end{cases} \quad (14)$$

En utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle et la relation  $\varepsilon_r = \dot{\varepsilon}_0 t_1$ , nous obtenons l'expression suivante de la contrainte durant la phase de relaxation ( $t \geq t_1$ )

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon_r + E_1 \varepsilon_r \frac{\tau_1}{t_1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_1}\right) \right] \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau_1}\right) \quad \text{pour } t \geq t_1 \quad (15)$$

On retrouve ici la décomposition de la contrainte en une partie quasi-statique  $\sigma_\infty = E_\infty \varepsilon_r$  et une partie visqueuse  $\sigma^v(t) = \sigma^v(t_1) \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau_1}\right)$  qui décroît exponentiellement avec le temps.

A noter que la valeur de la contrainte visqueuse au début de la relaxation  $\sigma^v(t_1)$  donnée par

$$\sigma^v(t_1) = E_1 \varepsilon_r \frac{\tau_1}{t_1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_1}\right) \right] \quad (16)$$

dépend de la vitesse de chargement au travers du rapport  $\frac{t_1}{\tau_1}$  entre le temps de chargement et le temps relaxation  $\tau_1$  (Figure 8). Dans le cas extrême où la vitesse est très grande ( $t_1 \ll \tau_1, \frac{\tau_1}{t_1} \rightarrow \infty$ ), la contrainte visqueuse est maximale et indépendante du temps de chargement  $t_1$  ; elle vaut  $\sigma^v(t_1) = E_1 \varepsilon_r$ . A l'opposé, pour une vitesse de chargement très lente ( $t_1 \gg \tau_1, \frac{\tau_1}{t_1} \rightarrow 0$ ), elle est nulle  $\sigma^v(t_1) = 0$  ; on se trouve dans le régime quasi-statique.

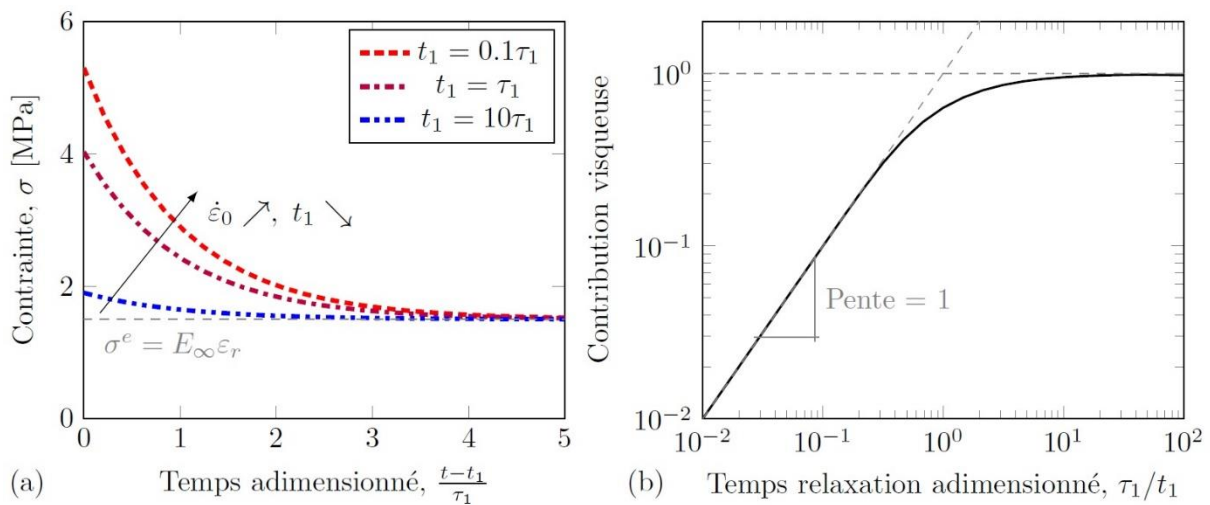


Figure 8 a) Courbe de relaxation du modèle de Zener ( $E_\infty = 75$  MPa,  $E_1 = 200$  MPa,  $\tau_1 = 1$  s) à différents temps de chargement  $t_1 = \frac{\varepsilon_r}{\dot{\varepsilon}_0}$  pour une sollicitation de relaxation à la déformation imposée  $\varepsilon_r = 2\%$  ; b) Contribution visqueuse,  $\frac{\sigma^v(t_1)}{E_1 \varepsilon_r}$ , en fonction du rapport  $\frac{\tau_1}{t_1}$  entre le temps de relaxation  $\tau_1$  et le temps de chargement  $t_1$

**Remarque :** A noter que dans de nombreux ouvrages, l'essai de relaxation est modélisé par un échelon de déformation ( $\varepsilon(t) = \varepsilon_r \forall t > 0$ ), c'est-à-dire que  $\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow \infty, t_1 \rightarrow 0$ . Cette modélisation du chargement peut laisser penser qu'il est possible d'observer et d'identifier des processus de relaxation avec des temps caractéristiques très faibles devant le temps de chargement ( $\tau_1 \ll t_1$ ). Alors que la vitesse des machines d'essais impose une limitation pour le temps de chargement de l'ordre 0.1 s.

### 3.2.3 Essai cyclique de charges-décharges

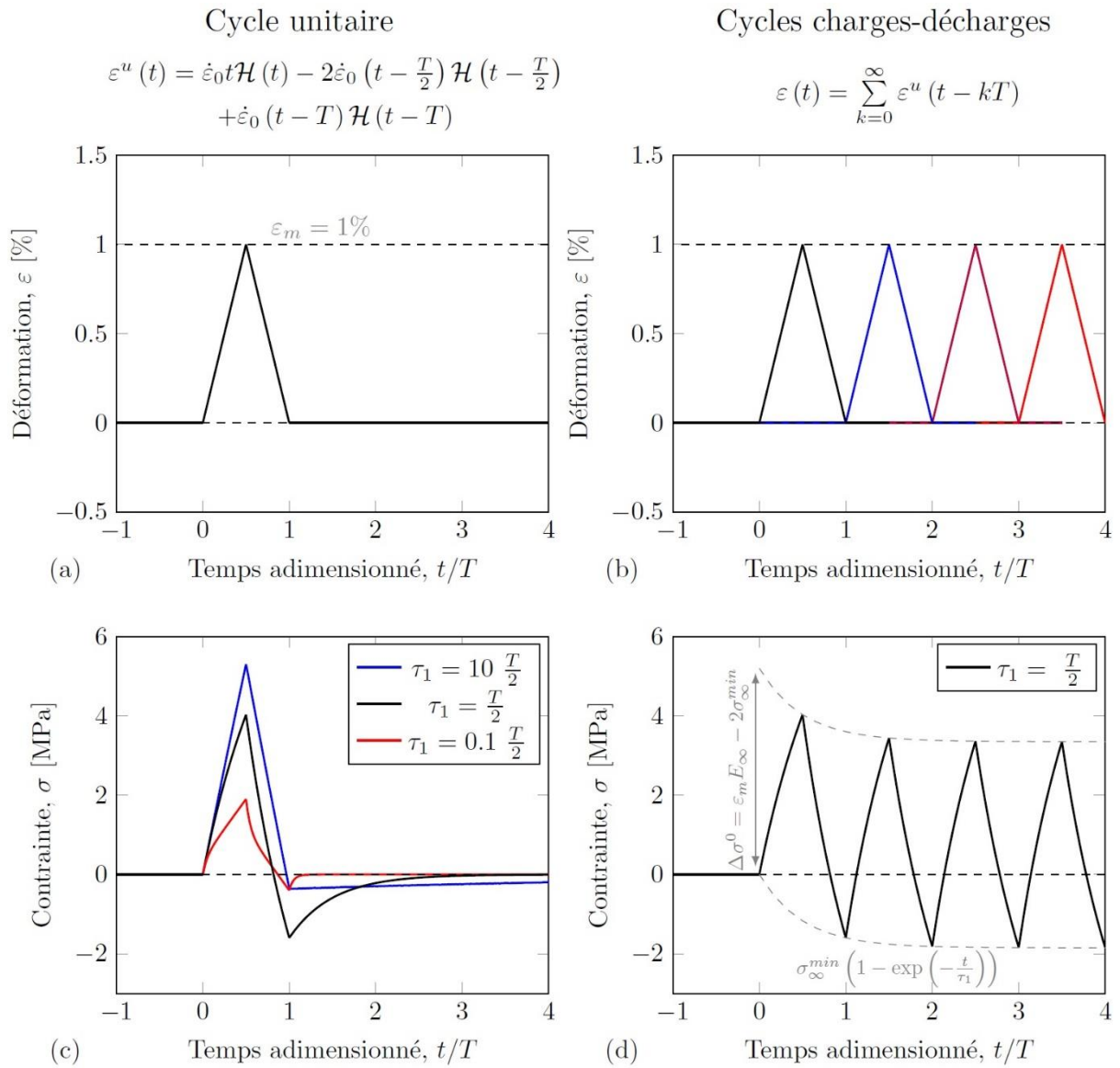


Figure 9 Déformation en fonction du temps adimensionné  $\frac{t}{T}$  où  $T$  est la période d'un cycle unitaire pour : (a) un cycle unitaire ; (b) pour un essai de charge-décharges. Evolution de la contrainte pour le modèle de Zener ( $E_{\infty} = 150$  MPa,  $E_1 = 400$  MPa) : (c) pour un cycle unitaire (d) pour un essai charges-décharges ; tous deux de période  $T=1$ s et de déformation maximale  $\varepsilon_m = 1$  %.

L'essai cyclique de charges-décharges peut se décomposer en une somme de cycle unitaire  $\varepsilon^u(t)$  retardés (Figures 9a,b), tel que

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^u(t - kT) \quad (17)$$

A noter que le cycle unitaire  $\varepsilon^u(t)$  peut se décomposer en une somme de rampe de la manière suivante :

$$\varepsilon^u(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left[ t\mathcal{H}(t) - 2\left(t - \frac{T}{2}\right)\mathcal{H}\left(t - \frac{T}{2}\right) + (t - T)\mathcal{H}(t - T) \right] \quad (18)$$

où  $\dot{\varepsilon}_0$  la vitesse de chargement.

On en déduit l'expression de la contrainte en fonction du temps

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^u(t - kT) \quad (19)$$

à l'aide de l'expression de la réponse en contrainte d'un cycle unitaire  $\sigma^u(t)$  qui s'exprime en utilisant la réponse caractéristique à une rampe  $\sigma^{cr}(t)$  (Eq. 11)

$$\sigma^u(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left[ \sigma^{cr}(t) - 2\sigma^{cr}\left(t - \frac{T}{2}\right) + \sigma^{cr}(t - T) \right] \quad (20)$$

La Figure 9c montre l'évolution de la réponse en contrainte d'un cycle unitaire  $\sigma^u(t)$ . Nous constatons que cette évolution dépend du rapport  $\frac{\tau_1}{T}$ . Un point important est que la contrainte  $\sigma^u(t)$  continue à évoluer alors que la déformation du cycle unitaire est nulle ( $t \geq T$ ) sur des durées de l'ordre de 3 à 5  $\tau_1$ . Cela signifie que la réponse du n-ième cycle dépend aussi des cycles précédents, il y a donc un effet mémoire. Cet effet mémoire est caractéristique de la viscoélasticité.

Nous pouvons observer, sur la Figure 9d, l'évolution de la contrainte au cours des cycles, nous constatons que la contrainte oscille entre deux courbes à décroissance exponentielle espacées d'une valeur  $\Delta\sigma_{\infty} = \varepsilon_m E_{\infty} - 2\sigma_{\infty}^{min}$ , où  $\varepsilon_m$  est la déformation maximale. La contrainte minimale du cycle stabilisée  $\sigma_{\infty}^{min}$  dépend du rapport  $\frac{\tau_1}{T}$  entre le temps de relaxation  $\tau_1$  et la période  $T$  des cycles charges-décharges (Figure 10b)

$$\sigma_{\infty}^{min} \left[ \frac{\tau_1}{T} \right] = -2\varepsilon_m E_1 \frac{\tau_1}{T} \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{2\tau_1}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{2\tau_1}\right)} \right]. \quad (21)$$

**Remarque :** Le fait que la contrainte minimale diminue pour atteindre une valeur négative ( $\sigma_{\infty}^{min} < 0$ ) est d'une grande importance pratique pour une sollicitation en traction. En effet, lorsque la contrainte devient négative l'échantillon rentre en compression. Or lorsqu'on travaille avec des films, il peut y avoir une instabilité élastique de flambement qui fausse les résultats de mesure. C'est la raison pour laquelle on applique une précharge lorsqu'on effectue des essais de DMTA en traction sur des films.

Au bout de 4 à 5 fois le temps de relaxation  $\tau_1$ , tous les cycles charges-décharges sont identiques et égaux au cycle stabilisé (Figure 10a). Outre l'amplitude de déformation  $\Delta\varepsilon$  imposée, il est possible de mesurer sur ce cycle stabilisé le module dynamique  $K_{\infty}$  qui est la pente de la droite passant par les extrémités du cycle en  $\varepsilon_{min} = 0$  et  $\varepsilon_{max} = \varepsilon_m$ . Pour le chargement cyclique en dent de scie considéré ici, il est égal à

$$K_{\infty} = \frac{\sigma(\varepsilon_{max}) - \sigma(\varepsilon_{min})}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}} = \frac{\Delta\sigma_{\infty}}{\varepsilon_m} = E_{\infty} + 2E_1 \frac{\tau_1}{T} \left[ \frac{\exp\left(-\frac{T}{2\tau_1}\right) - 1}{1 + \exp\left(-\frac{T}{2\tau_1}\right)} \right] \quad (22)$$

Il se compose d'une contribution de la branche élastique  $E_{\infty}$  et d'une contribution de la branche de Maxwell visqueuse qui dépend du temps de relaxation adimensionné  $\frac{\tau_1}{T}$  (Figure 10d). Lorsque le temps de relaxation est bien plus petit que la période  $\tau_1 \ll T$ , on se trouve dans le régime quasi-statique  $K_{\infty} = E_{\infty}$ , la branche de Maxwell ne contribue plus. A l'inverse lorsque la période est très courte devant le temps de relaxation  $T \ll \tau_1$ , la branche de Maxwell agit comme un ressort élastique  $K_{\infty} = E_{\infty} + E_1$ . Nous pouvons observer un zone de transitions aux alentours de  $\tau_1 \approx \frac{T}{2}$ .

Il est possible de mesurer sur le cycle stabilisé, l'énergie dissipée  $\mathcal{D}_{\infty}$  au sein du solide sous forme de chaleur par unité de volume, appelée énergie dissipée spécifique et définie par

$$\mathfrak{D}_\infty = \oint_{\substack{\text{cycle} \\ \text{stabilisé}}} \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) dt = \oint_{\substack{\text{cycle} \\ \text{stabilisé}}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (23)$$

L'énergie dissipée spécifique est égale à l'aire à l'intérieur du cycle stabilisé. Elle dépend également du temps de relaxation adimensionné  $\frac{\tau_1}{T}$ . Nous pouvons observer sur la **Figure 10f** que la dissipation est maximale pour  $\tau_1 \approx 0.16 T$ , puis qu'elle décroît telle que  $\mathfrak{D}_\infty \approx 4E_1 \varepsilon_m^2 \frac{\tau_1}{T}$  pour  $\tau_1 \ll T$  et telle que  $\mathfrak{D}_\infty \approx \frac{E_1 \varepsilon_m^2 T}{12 \tau_1}$  pour  $\tau_1 \gg T$  (régime quasi-statique).

**Remarque :** Les **Figures 10c et 10e** montrent l'évolution relative du module dynamique,  $K_n$ , et de l'énergie dissipée spécifique,  $\mathfrak{D}_n$ , au  $n$ -ime cycle. Ces deux grandeurs diminuent pour atteindre les valeurs du cycle stabilisé. Il est intéressant de noter que ces valeurs convergent à 1% près au bout d'une vingtaine de cycles, cela quelle que soit la valeur du temps de relaxation adimensionné  $\frac{\tau_1}{T}$ . Ceci a un intérêt pratique indéniable, car nous ne sommes pas obligés d'attendre  $5\tau_1$  pour être sur le cycle stabilisé pour une bonne estimation du module dynamique  $K_\infty$  et de l'énergie dissipé spécifique  $\mathfrak{D}_\infty$ . Ceci est d'autant plus vrai que le temps de relaxation adimensionné  $\frac{\tau_1}{T}$  est grand.

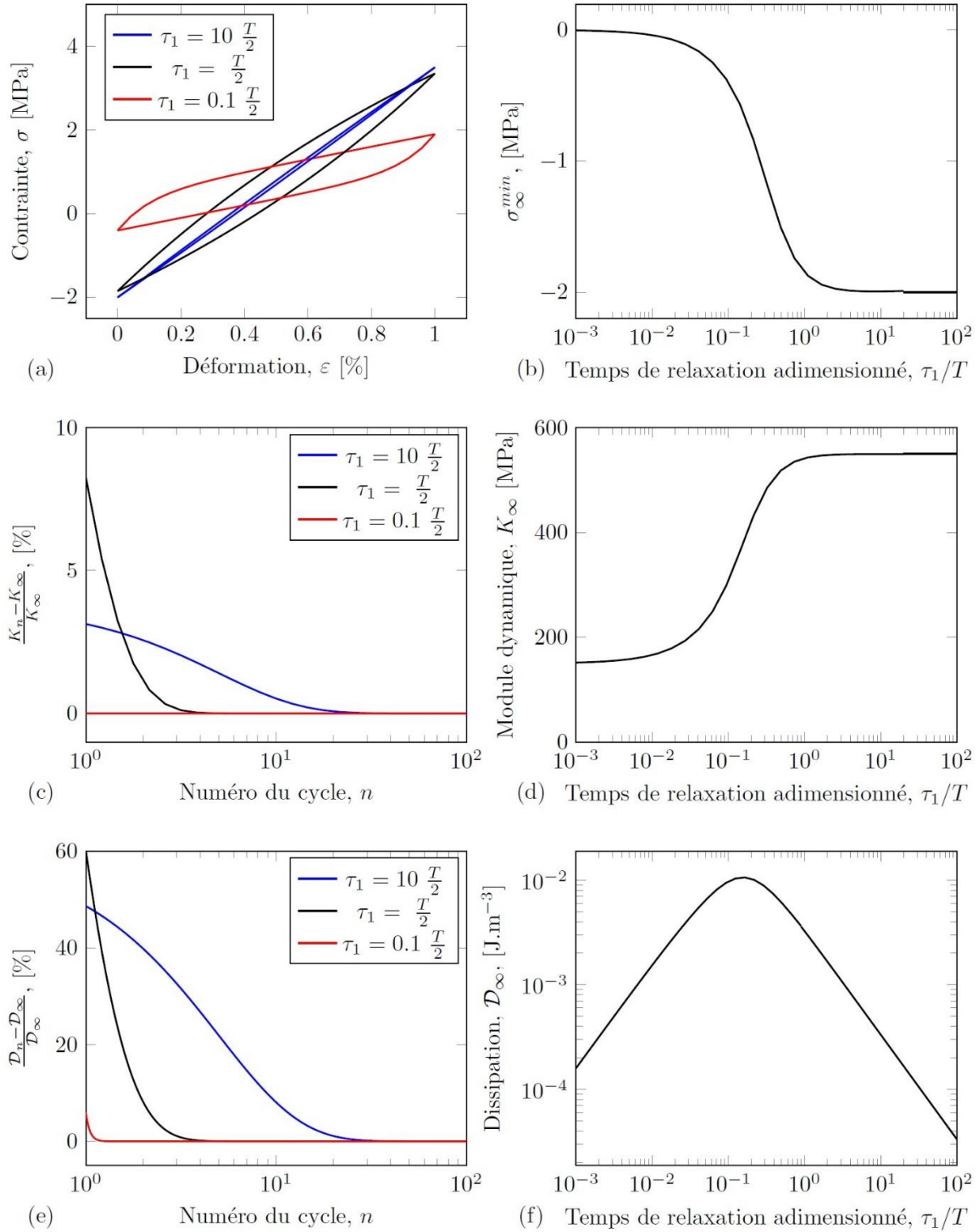


Figure 10 a) Cycle stabilisé pour différentes valeurs du temps relaxation  $\tau_1$  pour le modèle de Zener; b) Evolution de la contrainte minimale  $\sigma_{\infty}^{min}$  en fonction du temps relaxation adimensionnée ; c) Convergence du module dynamique  $K_n$  en fonction du numéro du cycle ; d) Evolution du module dynamique du cycle stabilisé  $K_{\infty}$  en fonction du temps relaxation adimensionnée ; c) Convergence de l'énergie dissipée spécifique durant le n-ième cycle  $\mathcal{D}_n$  ; d) Evolution de l'énergie dissipée spécifique sur le cycle stabilisé  $\mathcal{D}_{\infty}$  en fonction du temps

relaxation adimensionnée. A noter que pour toutes les courbes nous avons  $E_{\infty} = 150$  MPa,  $E_1 = 400$  MPa et avec  $T = 1$  s.

### 3.3 Réponse harmonique

La réponse harmonique (ou réponse fréquentielle) d'un modèle rhéologique est sa réponse à une sollicitation sinusoïdale. Elle est d'un grand intérêt pratique, car elle peut être obtenue expérimentalement par spectroscopie mécanique ou DMTA pour « Dynamic Mechanical Thermal Analysis » en anglais.

#### 3.3.1 Description de la sollicitation et de la réponse harmonique

Sans perte de généralité nous pouvons écrire une déformation harmonique sous la forme

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t), \quad (24)$$

où  $\varepsilon_0$  est l'amplitude de déformation et  $\omega$  la **pulsation** d'unité le radian par seconde [rad.s<sup>-1</sup>]. Elle est reliée à la fréquence,  $f$ , et la période  $T$ , par la formule

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (25)$$

Dans le cadre linéaire, la réponse en contrainte à une déformation harmonique est aussi harmonique de même pulsation  $\omega$ , mais déphasée (**Figure 11a**), de la forme

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (26)$$

où  $\sigma_0$  est l'amplitude de contrainte et  $\phi$  l'angle de déphasage. Ces deux quantités dépendent de la pulsation  $\omega$ .

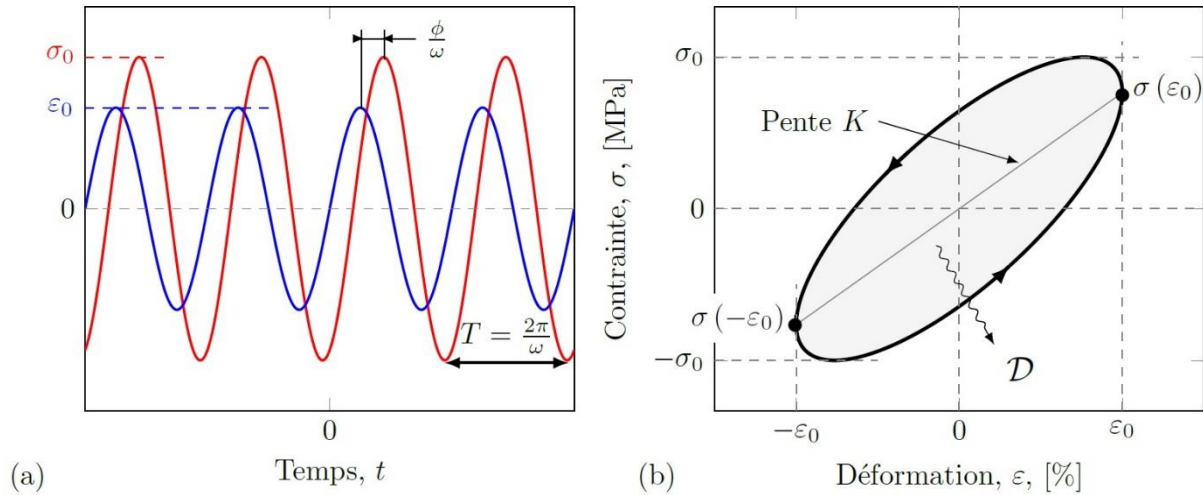


Figure 11 a) Sollicitation harmonique en déformaiton et contrainte harmonique déphasée dans le domaine viscoélastique linéaire ;b) Cycle stabilisé pour sollicitation harmonique dans le domaine viscoélastique linéaire.

### 3.3.2 Caractéristique du cycle stabilisé : module dynamique et énergie dissipée

Dans le plan contrainte déformation ( $\sigma$  vs.  $\varepsilon$ ), la réponse d'un modèle viscoélastique linéaire est une ellipse centrée sur l'origine (Figure 11b). Nous pouvons définir le **module dynamique**  $K$  comme la pente de la droite passant par les points de déformation maximale et minimale

$$K = \frac{\sigma(\varepsilon_{max}) - \sigma(\varepsilon_{min})}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}} = \frac{\sigma(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \quad (27)$$

Nous rappelons ici que la puissance mécanique instantanée spécifique par unité de volume fourni au matériau est par définition

$$\mathcal{P}(t) = \sigma(t)\dot{\varepsilon}(t). \quad (28)$$

L'**énergie dissipée spécifique** par cycle par unité de volume s'obtient en intégrant la puissance mécanique sur une période

$$\mathcal{D} = \oint_{\text{cycle stabilisé}} \mathcal{P}(t) dt = \oint_{\text{cycle stabilisé}} \sigma(t)\dot{\varepsilon}(t) dt = \oint_{\text{cycle stabilisé}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (29)$$

La dernière égalité s'obtient en utilisant le changement de variable  $d\varepsilon = \dot{\varepsilon}(t) dt$ . Elle montre que l'énergie dissipée spécifique est la surface à l'intérieur du cycle stabilisé (Figure 11b).

**Remarque** En pratique, il arrive qu'on ajoute une pré-déformation constante  $\varepsilon_c$  ceci a pour effet de translater le cycle stabilisé dans le plan contrainte déformation ( $\sigma$  vs.  $\varepsilon$ ). Il est important de noter que cela ne change rien aux valeurs du module dynamique et de l'énergie dissipée sous réserve de rester dans le domaine linéaire.

### 3.3.3 Notation complexe et notion de modules complexes

Dans le cas harmonique, il est commode d'utiliser les grandeurs complexes (notées avec un astérisque dans la suite) :

$$\varepsilon^*(t) = \varepsilon_0 \exp(j\omega t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) + j\varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (30)$$

$$\sigma^*(t) = \sigma_0 \exp(j(\omega t + \phi)) = \sigma_0 \cos(\omega t + \phi) + j\sigma_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (31)$$

où  $j$  est l'imaginaire pur ( $j^2 = -1$ ). La quantité physique associée à la notation complexe est donnée par la partie réel de la quantité complexe

$$\varepsilon(t) = \mathcal{R}\{\varepsilon^*(t)\} \quad \text{et} \quad \sigma(t) = \mathcal{R}\{\sigma^*(t)\}. \quad (32)$$

L'avantage de la notation complexe est d'aboutir à une relation similaire à la loi de Hooke entre les quantités complexes

$$\sigma^* = E^*(\omega)\varepsilon^* \quad \text{avec} \quad E^*(\omega) = \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0} \exp(j\phi(\omega)) \quad (33)$$

où  $E^*(\omega)$  est le **module complexe** qui dépend de la pulsation  $\omega$  au travers de l'angle de déphasage  $\phi(\omega)$  et de l'amplitude de contrainte  $\sigma_0(\omega)$ .

A partir du module complexes, on définit les grandeurs classiques suivantes :

**Le module de conservation,  $E'(\omega)$**  : partie réel de  $E^*(t)$  (unité le [MPa])

$$E'(\omega) = \mathcal{R}\{E^*(t)\} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\phi) \quad (34)$$

**Le module de perte,  $E''(\omega)$**  : partie imaginaire de  $E^*(t)$  (unité le [MPa])

$$E''(\omega) = \mathcal{Jm}\{E^*(t)\} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin(\phi) \quad (35)$$

Le **facteur de perte**,  $\delta(\omega)$  (sans unité)

$$\delta(\omega) = \frac{E''}{E'} = \tan \phi \quad (36)$$

Certains auteurs introduisent également le facteur de qualité  $Q = \frac{E'}{E''} = \frac{1}{\delta}$  qui est l'inverse du facteur de perte.

En revenant dans le domaine temporel, il est possible d'exprimer la contrainte comme une contribution en phase avec la déformation et une autre en opposition de phase

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E' \cos(\omega t) - \varepsilon_0 E'' \sin(\omega t). \quad (37)$$

La partie en phase est proportionnelle au module de conservation  $E'$  et la partie en opposition de phase est proportionnelle au module de perte  $E''$ . En constatant que  $\sigma(\varepsilon_0) = \varepsilon_0 E'(\omega)$ , il vient que le module dynamique est égale au module de conservation

$$K = E'(\omega). \quad (38)$$

En utilisant cette expression de la contrainte, il vient que l'énergie dissipée durant un cycle est proportionnelle au module de perte

$$\mathfrak{D} = \oint_{\substack{\text{cycle} \\ \text{stabilisé}}} \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) dt = \int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} -\sigma(t) \varepsilon_0 \omega \sin(\omega t) dt = \pi \varepsilon_0^2 E''(\omega). \quad (39)$$

**Remarque** Le facteur de perte  $\delta(\omega)$  est une grandeur sans unité qui mesure de manière quantitative la capacité d'amortissement ou dissipative d'un matériau à la pulsation  $\omega$ . Pour un matériau élastique non dissipatif, le facteur de perte est nul. Lorsqu'on cherche un matériau absorbant à la fois d'un point de vue mécanique ou acoustique on prendra celui qui a le plus grand facteur de perte à la pulsation souhaitée.

Certains auteurs définissent le facteur de perte comme le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie élastique maximale. Or cette définition est équivalente à celle utilisée ici que dans le cas des faibles amortissements ( $\delta < 0.1$ ), où l'énergie élastique maximale peut être assimilée à  $\frac{1}{2}\varepsilon_0^2 E'$ . En règle générale, l'énergie élastique maximale dépend à la fois du module de conservation et du module de perte (Bourbié et al 1986). L'évaluation de cette énergie élastique maximale ne saurait être entreprise qu'avec des informations supplémentaires sur le modèle rhéologique.

### 3.3.4 Calcul du module complexe du modèle de Zener

On rappelle ici que le modèle de Zener est gouverné par trois équations différentielles (Eq. 7)

$$\begin{cases} \sigma &= \sigma_\infty + \sigma_1 \\ \sigma_\infty &= E_\infty \varepsilon \\ \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{1}{\tau_1} \sigma_1 &= E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \end{cases}$$

Pour déterminer la réponse harmonique de ce modèle, nous allons utiliser une propriété très utile de la notation complexe des fonctions harmoniques, à savoir que la dérivée temporelle de  $f^*(t) = f_0(\omega) \exp(j\omega t + \phi)$  équivaut à multiplier par  $j\omega$

$$\frac{df^*}{dt} = j\omega f^* \quad (40)$$

En remplaçant les dérivées temporelles par le produit  $j\omega$ , le système d'équations différentielles est remplacé par un système d'équations algébriques

$$\begin{cases} \sigma^* &= \sigma_\infty^* + \sigma_1^* \\ \sigma_\infty^* &= E_\infty \varepsilon^* \\ j\omega \sigma_1^* + \frac{1}{\tau_1} \sigma_1^* &= j\omega E_1 \varepsilon^* \end{cases} \quad (41)$$

On en déduit que l'expression du module complexe

$$E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \left( E_\infty + \frac{j\omega E_1 \tau_1}{j\omega \tau_1 + 1} \right). \quad (42)$$

Il en découle que

$$E'(\omega) = E_\infty + E_1 \frac{(\tau_1 \omega)^2}{1 + (\tau_1 \omega)^2} \quad (43)$$

$$E''(\omega) = E_1 \frac{\tau_1 \omega}{1 + (\tau_1 \omega)^2} \quad (44)$$

$$\delta(\omega) = \frac{E_1 \tau_1 \omega}{E_\infty + (E_\infty + E_1)(\tau_1 \omega)^2} \quad (45)$$

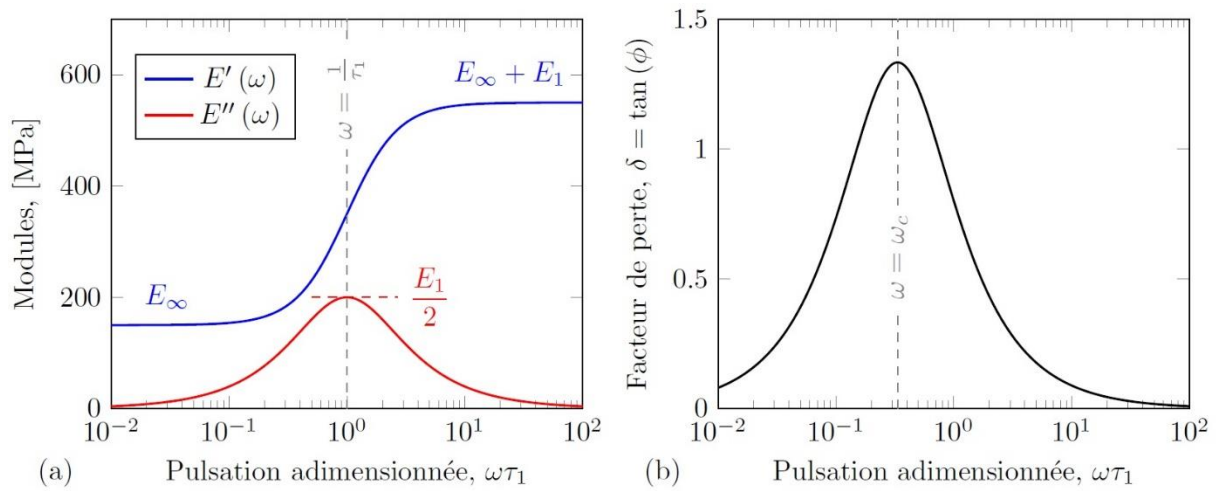


Figure 12 a) Module de conservation  $E'$  et module de perte  $E''$  en fonction de la pulsation  $\omega$  pour le modèle de Zener ( $E_\infty = 150$  MPa,  $E_1 = 400$  MPa et  $\tau_1 = 1$  s) ; b) Facteur de perte en fonction de la pulsation.

La **Figure 12** montre l'évolution de ces quantités en fonction de la pulsation  $\omega$ . La courbe du module de conservation  $E'(\omega)$  forme une marche allant continuellement du module statique  $E_\infty$  (régime quasi statique  $\omega \ll \frac{1}{\tau_1}$ ) au module instantané  $E_0 = E_\infty + E_1$  ( $\omega \gg \frac{1}{\tau_1}$ ). Elle présente un point d'inflexion à la pulsation  $\omega = \frac{1}{\tau_1}$ . La courbe du module de perte a la forme d'une cloche, elle atteint sa valeur maximale  $\frac{1}{2}E_1$  à la pulsation  $\omega = \frac{1}{\tau_1}$ , puis tend vers zéro pour les faibles pulsations ( $\omega \ll \frac{1}{\tau_1}$ ) et les pulsations élevées ( $\omega \gg \frac{1}{\tau_1}$ ). Le facteur de perte forme également une courbe en cloche dont le maximum  $\delta_{max}$  se situe à la pulsation  $\omega_c < \frac{1}{\tau_1}$  tel que

$$\omega_c = \frac{1}{\tau_1 \sqrt{1 + r_E}} \quad \text{et} \quad \delta_{max} = \frac{r_E}{2\sqrt{1 + r_E}} \quad \text{avec} \quad r_E = \frac{E_1}{E_\infty}. \quad (46)$$

## 4 Validité des modèles

### 4.1 Comment choisir le modèle rhéologique ?

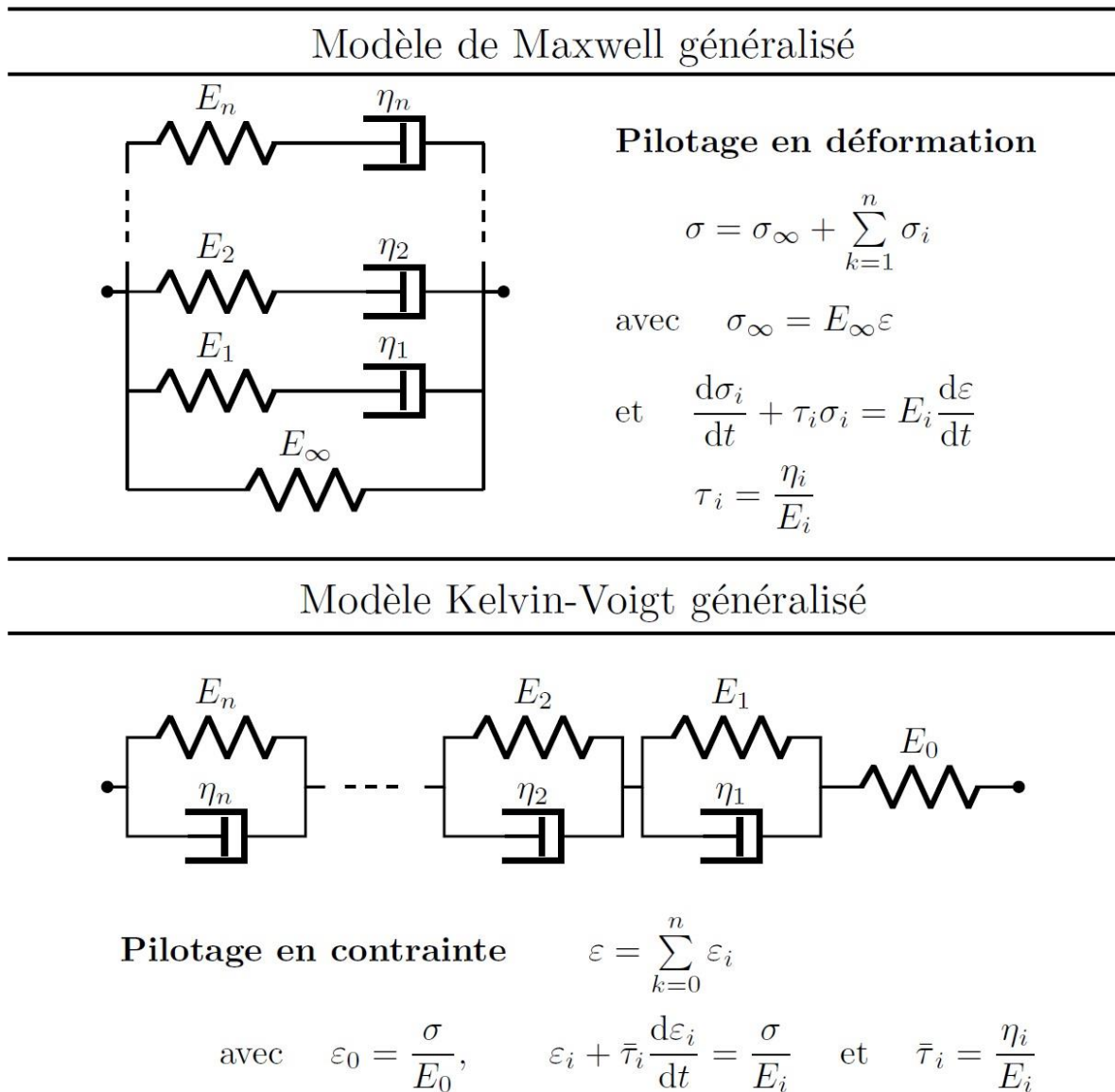


Figure 13 Modèles rhéologiques généralisés à spectre de temps relaxation discret.

Il existe deux grandes familles de modèles rhéologiques pour les solides viscoélastiques linéaires : le **modèle de Maxwell généralisé** et le **modèle de Kelvin-Voigt généralisé** pour les solides (Figure 13). Ils sont les extensions à plusieurs temps de relaxation des deux types de modèle de Zener. Il est important de savoir que ces modèles sont équivalents et

qu'il est possible de passer de l'un à l'autre. Le choix de l'un ou l'autre de ces modèles est dicté, selon moi, par la simplicité de son utilisation. Par exemple, si nous connaissons la déformation  $\varepsilon(t)$ , comme pour des essais de traction ou de relaxation, il est préférable de prendre le modèle de Maxwell généralisé. En effet, la loi d'association des éléments rhéologiques en parallèle implique une décomposition additive de la contrainte :

$$\sigma(t) = \sigma_{\infty}(t) + \sum_{k=1} \sigma_k[\varepsilon(t)], \quad (47)$$

avec  $\sigma_{\infty}(t) = E_{\infty}\varepsilon(t)$  qui correspond à la contribution quasi-statique de la branche élastique et où les  $\sigma_k[\varepsilon(t)]$  correspondent à la contribution associée à la k-ième branche de Maxwell. Cette dernière s'obtient à partir de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{d\sigma_k}{dt} + \frac{1}{\tau_k}\sigma_k = E_k \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (48)$$

où les  $\tau_k = E_k/\eta_k$  définissent les temps de relaxation du modèle. A noter que pour chargement en déformation, il est possible de transposer les résultats obtenus sur les réponses temporelles du modèle de Zener (cf Sections 3.2) au modèle de Maxwell généralisé.

A l'inverse, si nous connaissons la contrainte  $\sigma(t)$ , comme pour des essais de fluage ou de fatigue à amplitude de contraintes imposée, il est préférable de prendre un modèle de Voigt généralisé. En effet, la loi d'association des éléments rhéologiques en série implique une décomposition additive de la déformation :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) + \sum_k \varepsilon_k[\sigma(t)], \quad (49)$$

avec  $\varepsilon_0(t) = \sigma(t)/E_0$  qui correspond à la déformation instantanée et où les  $\varepsilon_k[\sigma(t)]$  correspondent à la déformation associée au k-ième élément de Voigt. Cette dernière s'obtient à partir de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} + \frac{1}{\bar{\tau}_k} \varepsilon_k = \frac{1}{\bar{\tau}_k E_k} \sigma(t) \quad (50)$$

où les  $\bar{\tau}_k = E_k/\eta_k$  définissent les temps de retard élastique.

A noter qu'il existe d'autres types de modèles qui s'expriment simplement dans le domaine fréquentiel (cf. Section 5.3.2) comme le modèle à dérivée fractionnaire (Rouleau 2013). Il existe également des modèles dédiés à l'étude de la relaxation dans le domaine temporel comme le modèle d'exponentielle étirée, appelé également modèle KWW (Kohlrausch-Williams-Watts), qui a été introduit par Kohlrausch 1963 et réutilisé pour l'étude de la relaxation diélectrique par Williams et Watts 1970. Le modèle KWW fournit l'évolution de la contrainte suivante pour un essai de relaxation

$$\frac{\sigma(t) - \sigma_\infty}{\sigma_0 - \sigma_\infty} = \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right), \quad (51)$$

où  $\sigma_0$  est la contrainte au début de la relaxation,  $\sigma_\infty$  la contrainte relaxée, la constante  $\tau$  est homogène à un temps, et l'exposant  $0 \leq \alpha \leq 1$  contrôle la vitesse de décroissance. Ce modèle est simple à identifier en traçant  $\log(\sigma(t) - \sigma_\infty)$  vs  $\log t$ . Mais il n'existe pas de fonction analytique pour exprimer le module complexe associé  $E_{KWW}^*(\omega)$ .

#### 4.2 Comment identifier les paramètres d'un modèle rhéologique ?

Une fois que le modèle a été choisi, l'étape suivante est d'identifier les paramètres de ce modèle. La première étape est de choisir les temps de relaxation dans le cas du modèle Maxwell généralisé et les temps de retard dans le cas d'un modèle de Kelvin-Voigt généralisé. Puis ensuite, il faut déterminer les modules  $E_i$  à l'aide d'une régression pour ajuster au mieux le modèle aux données.

Avant d'étudier le cas l'identification dans l'espace temporel par un essai de relaxation et dans l'espace fréquentiel à partir des courbes maîtres, nous allons énoncer deux règles pratiques.

**Règle 1 :** Généralement, un choix d'un à trois temps de relaxation par décade donne de bons résultats.

**Règle 2 :** les paramètres du modèle (temps de relaxation et modules) doivent être positifs pour des raisons physiques. Si la procédure d'identification aboutit à un ou plusieurs modules négatifs, c'est le signe que le modèle rhéologique n'est pas adapté au cas étudié. Par conséquent, il faut le changer.

#### 4.2.1 Identification à l'aide d'essais de relaxation

On rappelle ici qu'un essai de relaxation à la déformation  $\varepsilon_r$  est défini par le chargement (Figure 7a)

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_0 t \mathcal{H}(t) & t < t_r \\ \varepsilon_r & t \geq t_r \end{cases} \quad (52)$$

où  $\dot{\varepsilon}_0$  est la vitesse de chargement et  $t_r = \frac{\varepsilon_r}{\dot{\varepsilon}_0}$  est le temps de chargement. La réponse du modèle Maxwell généralisé à  $n$  branches s'obtient aisément à l'aide la réponse du Zener de type (Eq. 15)

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon_r + \sum_{i=1}^n E_i \varepsilon_r \lambda \left[ \frac{t_r}{\tau_i} \right] \exp\left(-\frac{t-t_r}{\tau_i}\right) \quad (53)$$

où  $\lambda \left[ \frac{t_r}{\tau_i} \right] = \frac{\tau_i}{t_r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_r}{\tau_i}\right) \right]$  est une constante caractérisant l'activité de la branche  $i$ .

##### *Etape 1 Choix des temps de relaxation*

Pour le temps de relaxation le plus grand, il est intéressant de prendre un temps du même ordre de grandeur que la durée de l'essai et pour le temps de relaxation le plus faible la durée d'acquisition des points expérimentaux. Ensuite, on commence par choisir un temps de relaxation par décade. Il est possible d'augmenter le nombre de temps de relaxation en veillant à conserver une progression géométrique ( $\tau_{i+1} = a\tau_i$ , où  $a$  est constante, par exemple  $a = 10^{\frac{1}{3}}$  pour avoir 3 temps de relaxation par décade).

**Exemple :**

Pour un essai de relaxation d'une durée de 1000 s avec un temps d'acquisition entre deux points de mesure de 0.1s. Nous choisirons, dans un premier temps, 5 temps de relaxation :  
 $\tau_1 = 0.1s, \tau_2 = 1s, \tau_3 = 10 s, \tau_4 = 100 s, \tau_5 = 1000 s.$

### *Etape 2 Ajustement de la courbe relaxation par un somme d'exponentielle*

En prenant l'origine des temps au début de la relaxation ( $t^* = t - t_r$ ), on constate que la réponse du modèle de Maxwell s'écrit sous la forme d'une somme d'exponentielles décroissantes, appelée **série de Prony** :

$$\sigma(t^*) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \exp\left(-\frac{t^*}{\tau_i}\right). \quad (54)$$

L'objectif de cette étape est de trouver les  $(n + 1)$  paramètres  $\{a_i\} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  qui minimisent l'écart entre la réponse du modèle  $\sigma(t^*)$  et les données expérimentales  $\sigma^{exp}$ . La résolution de ce problème de minimisation qui est équivalent à un problème régression sort du cadre de ce cours. Toutefois, elle peut être menée avec les outils classiques de régression tels que *Curve Fitting Toolbox* de Matlab ou du logiciel libre représentation graphique Gnuplot.

**Remarque** Une fois cette étape effectuée, il est intéressant d'évaluer qualitativement l'ajustement en traçant la réponse du modèle et les données expérimentales. Puis pour se rendre compte de la précision de l'évaluation d'un paramètre  $a_i$ , il est d'usage de le faire varier de quelques pourcents pour voir son influence sur la réponse du modèle. En effet, si le paramètre n'a pas ou très peu d'influence sur la réponse cela signifie que son estimation est peu fiable. Dans ce cas, il est possible de supprimer le temps de relaxation  $\tau_i$  associé au paramètre  $a_i$  ou de changer sa valeur.

Une fois que les paramètres  $\{a_i\}$  sont identifiés, il ne reste plus qu'à en déduire les modules en introduisant les facteurs correctifs liés à la vitesse de chargement  $\lambda \left[ \frac{t_r}{\tau_i} \right]$  :

$$E_\infty = \frac{a_0}{\varepsilon_r} \text{ et } E_i = \frac{a_i}{\varepsilon_r \lambda \left[ \frac{t_r}{\tau_i} \right]} = \frac{a_i}{\varepsilon_r \frac{\tau_i}{t_r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_r}{\tau_i}\right) \right]} \text{ pour } 1 \leq i \leq n. \quad (55)$$

#### 4.2.2 Identification à l'aide de la courbe maîtresse issue de la DMTA

On donne ici les expressions des modules de conservation  $E'$  et de perte  $E''$  en fonction de la pulsation  $\omega$  pour le modèle de Maxwell généralisé :

$$E'(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i \frac{(\tau_i \omega)^2}{1 + (\tau_i \omega)^2} \text{ et } E''(\omega) = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\tau_i \omega}{1 + (\tau_i \omega)^2}. \quad (56)$$

##### *Etape 1 Choix des temps de relaxation*

Pour décrire la courbe maîtresse sur une plage de pulsation  $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ , il faut prendre des temps de relaxation compris dans l'intervalle  $\tau_i \in \left[ \frac{1}{\omega_{max}}, \frac{1}{\omega_{min}} \right]$ . Ensuite, on commence par choisir un temps de relaxation par décade. Pour décrire au mieux le pic du module de perte  $E''$  se situant à la fréquence  $\omega_\alpha$ , il est préférable de prendre un temps de relaxation  $\tau_i = \frac{1}{\omega_\alpha}$ .

##### *Etape 2 Ajustement de la courbe maîtresse*

Lors de cette étape, on cherche les modules  $E_i$  des branches de Maxwell qui permettent le meilleur ajustement du module de perte  $E''$ . Puis le paramètre  $E_\infty$  pour ajuster au mieux le module de conservation.

#### 4.3 Est-il possible de déterminer le module de cisaillement complexe, $G^*(\omega)$ , à partir du module d'Young complexe $E^*(\omega)$ ?

Un matériau élastique isotrope est complètement défini par deux constantes élastiques, par exemple le **module d'Young**  $E$  et le **coefficient de Poisson**  $\nu$  (cf Chap Alba). Dans ce cas, le **module de cisaillement**  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  est une fonction de ces deux constantes. Or c'est une erreur de penser que le module de cisaillement complexe peut être déduit du module d'Young complexe et d'un coefficient de Poisson issue de la littérature ou d'un essai de traction. En effet, il n'y a aucune raison physique pour que les modules d'Young et de

cisaillement est la même dépendance à la pulsation  $\omega$ . En effet pour utiliser l'analogie de cette relation entre les modules complexes, il faut aussi considérer que le coefficient de Poisson est complexe. Par conséquent, il faut absolument considérer tous les modules comme complexe pour transposer les formules classiques de l'élasticité à la viscoélasticité linéaire.

Pour conclure, il est nécessaire d'étudier deux modules complexes pour identifier complètement le comportement viscoélastique linéaire isotrope. Par exemple, le module d'Young complexe  $E^*(\omega)$  par un essai de traction ou de flexion par DMTA et le module de cisaillement complexe  $G^*(\omega)$  par un essai de cisaillement.

#### 4.4 Quelles sont les limites du cadre viscoélastique linéaire ?

Le cadre de la viscoélasticité linéaire reste valable pour les faibles déformations ( $\varepsilon < 1$  à 3 %) ou amplitudes de déformation avant de rentrer dans le domaine élastique non-linéaire (élasticité caoutchoutique, cf. Chapitre ) ou qu'autres phénomènes anélastiques apparaissent (viscoplasticité, endommagement, ..., cf. Chapitre). Le lecteur intéressé par ces phénomènes non-linéaires pourra se référer aux ouvrages de références Halary et al 2015 pour les aspects physico-chimiques, Besson et al 2001 et Lemaître et al 2009 pour les aspects mécaniques des matériaux et Bergstrom 2015 pour les aspects mécaniques des polymères.

Bien qu'en restant aux faibles déformations, il est possible de sortir du domaine de validité de la viscoélasticité linéaire lorsqu'on étudie les polymères sur des temps longs ou à hautes températures. En effet sur des temps longs les mécanismes de vieillissement chimique (oxydation, photodégradation, ...) ou physique (migration de solvant, ...) peuvent apparaître. Nous renvions le lecteur à l'ouvrage de Verdu 1984.

Toutefois, de nombreuses notions introduites dans ce chapitre sont utilisées pour l'étude de ces mécanismes non-linéaires. Par exemple, les schémas rhéologiques sont largement

utilisés pour l'étude du comportement mécanique en introduisant des éléments non-linéaire (patin plastique, amortisseur non linéaire, ...). Il est également possible de découpler la contribution des phénomènes viscoélastique linéaire des autres phénomènes anélastiques non-linéaires. Par exemple, [Detrez 2008](#) et [Detrez et al 2011](#) ont soustrait la contribution visqueuse linéaire identifiée par DMTA pour étudier le couplage entre plasticité et endommagement à l'aide d'essais de charges-décharges.

## 5 Formulation fonctionnelle de la viscoélasticité linéaire

D'un point de vue formel, nous cherchons un opérateur mathématique qui relie la contrainte  $\sigma(t)$  à l'instant  $t$  à l'histoire du trajet de déformation  $\varepsilon(u)$  tel que

$$\sigma(t) = \mathcal{R}\{\varepsilon(u)\}, \quad \text{pour } -\infty < u \leq t. \quad (57)$$

L'opérateur  $\mathcal{R}\{\}$  est appelé **fonctionnelle de relaxation**. Son homologue  $\mathcal{F}\{\}$ , appelé **fonctionnelle de fluage**, relie la déformation à l'instant  $t$  à l'histoire du chargement en contrainte :

$$\varepsilon(t) = \mathcal{F}\{\sigma(u)\}, \quad \text{pour } -\infty < u \leq t. \quad (58)$$

### 5.1 Hypothèses fondamentales et principe de superposition

La théorie de la viscoélasticité linéaire repose sur les trois hypothèses suivantes : stationnarité, causalité et linéarité. Ces hypothèses permettent d'écrire les fonctionnelles de relaxation sous forme d'un produit de convolution

$$\sigma(t) = \mathcal{R}\{\varepsilon(u)\} = \int_0^t m(t-u)\varepsilon(u)du \quad (59)$$

où  $m(t)$  est la fonction mémoire.

Avant de continuer nous allons commenter ces trois hypothèses.

**Hypothèse 1:** La stationnarité ou l'homogénéité en temps traduit que les opérateurs ne dépendent pas de l'origine des temps, c'est-à-dire que

$$\sigma(t-u) = \mathcal{F}\{\varepsilon(t-u)\} \quad \forall u. \quad (60)$$

Cette hypothèse signifie qu'il n'y a pas de vieillissement.

**Hypothèse 2 :** La causalité est un principe fondamental de la physique qui impose que la réponse d'un système à l'instant  $t$  ne dépend pas de son futur donc de la valeur des causes aux instant  $u > t$ . Ceci se traduit par le fait que

$$m(t) = 0 \quad \forall t < 0. \quad (61)$$

**Hypothèse 3 :** La linéarité est l'hypothèse qui induit le théorème de superposition, elle est très utile dans la pratique. Nous nous en sommes servis plusieurs fois dans la [Section 3.2](#) pour déterminer la réponse temporelle du modèle de Zener.

On trouve dans la littérature, une autre écriture de la fonctionnelle de relaxation dans le cadre viscoélastique faisant apparaître la réponse quasi-statique :

$$\sigma(t) = E_{\infty} \varepsilon(t) + \int_0^t r(t-u) \frac{d\varepsilon}{dt}(u) du \quad (62)$$

où  $r(t)$  est la fonction de relaxation. La version analogue de la fonctionnelle de fluage est :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \sigma(t) + \int_0^t J(t-u) \frac{d\sigma}{dt}(u) du \quad (63)$$

où  $J(t)$  est la fonction de fluage.

#### Exemple :

Pour le modèle de Zener, la fonction de relaxation est

$$r(t) = E_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \mathcal{H}(t).$$

Sa fonction mémoire est définie au sens des distributions par

$$m(t) = E_{\infty} \delta(t) - E_1 t \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \mathcal{H}(t)$$

où  $\delta(t)$  est la distribution de Dirac.

### 5.1.1 Principe de superposition

Soient deux chargements en déformation connus  $\varepsilon_1(t)$  et  $\varepsilon_2(t)$  produisant une réponse du matériaux en contrainte  $\sigma_1(t)$  et  $\sigma_2(t)$  alors la réponse  $\sigma(t)$  associée au chargement combiné  $\varepsilon(t) = \alpha\varepsilon_1(t) + \beta\varepsilon_2(t)$  est

$$\sigma(t) = \mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \alpha\sigma_1(t) + \beta\sigma_2(t), \quad (64)$$

quelques soient les valeurs des réels  $\alpha$  et  $\beta$ . Noter que cette propriété est vraie pour tout instant  $t$ .

### 5.2 Module opérationnel et compliance opérationnelle

Bien utile pour l'écriture formelle de la loi de comportement élastique, le produit de convolution l'est moins dans la pratique. L'un des moyens de le traiter avec des outils mathématiques usuels est d'utiliser la transformée de Laplace. Cette transformée fonctionnelle dont les propriétés sont rappelées en [Annexe 2](#) présente l'énorme avantage de transformer le produit de convolution en produit classique.

Dans la suite, nous noterons les transformées de Laplace des fonctions temporelles à l'aide du symbole  $\hat{\phantom{x}}$  tel que

$$\hat{\sigma}(p) = \mathcal{L}_p[\sigma(t)] \quad \text{et} \quad \hat{\varepsilon}(p) = \mathcal{L}_p[\varepsilon(t)] \quad (65)$$

où  $p$  est une variable complexe.

L'intérêt de la transformée de Laplace est de transformer le produit de convolution dans l'espace des temps en un produit dans l'espace de Laplace, si bien que la loi de comportement viscoélastique s'écrit

$$\hat{\sigma}(p) = \hat{E}(p)\hat{\varepsilon}(p). \quad (66)$$

Cette équation à la même forme que la loi de Hooke en élasticité linéaire,  $\hat{E}(p)$  joue le même rôle que le module d'Young, sera appelé *module opérationnel*. Il est par définition la transformée de Laplace de la fonction de réponse en contrainte

De la même façon, nous pouvons définir la *compliance opérationnelle*  $\hat{S}(p) = 1/\hat{E}(p)$  qui vérifie

$$\hat{\varepsilon}(p) = \hat{S}(p)\hat{\sigma}(p) \quad (67)$$

Le module opérationnel et son inverse la compliance opérationnelle sont des notions analogues à la fonction de transfert en asservissement ou de l'impédance et l'admittance complexes de l'électricité ou de l'acoustique.

### 5.2.1 Peut-on mesurer le module opérationnel ?

En plus de son intérêt calculatoire, le module opérationnel est directement relié à la réponse harmonique du matériau. C'est-à-dire qu'il s'obtient à l'aide des résultats de DMTA. En effet, il est possible de montrer qu'en prenant  $p = j\omega$  le module opérationnel s'identifie au module complexe  $E^*(\omega)$

$$\hat{E}(p = j\omega) = E^*(\omega) = E'(\omega) + j E''(\omega). \quad (68)$$

## 5.3 Exemple de modules opérationnels

### 5.3.1 Fractions rationnelles

Les modules opérationnels sous forme de fractions rationnelles sont les plus utilisés. Ils s'écrivent

$$E(p) = \frac{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_mp^m}, \quad \text{et} \quad S(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n}.$$

En effet, ils sont équivalents à définir la relation contrainte déformation par équation différentielle ordinaire. En utilisant, la propriété de la transformée de Laplace d'une dérivée temporelle d'ordre  $n$  ( $\mathcal{L}_p \left[ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n \hat{f}(p)$ ), sous l'hypothèse que  $f(t)$  et toutes ces dérivées d'ordre  $n - 1$  sont nulles  $\forall t \leq 0$ , cf [Annexe 2](#)) que l'équation algébrique dans l'espace de Laplace :

$$\hat{\sigma}(p) = \frac{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_mp^m} \hat{\varepsilon}(p) \quad (69)$$

est équivalente à l'équation différentielle ordinaire

$$b_0\sigma + b_1 \frac{d\sigma}{dt} + b_2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m\sigma}{dt^m} = a_0 + a_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + a_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n\varepsilon}{dt^n} \quad (70)$$

associée aux conditions initiales  $\sigma(t=0) = \frac{d^k\sigma}{dt^k}(t=0) = 0 \quad \forall k \leq m-1$  et  $\varepsilon(t=0) = \frac{d^k\varepsilon}{dt^k}(t=0) = 0 \quad \forall k \leq n-1$ .

Par conséquent tous les modèles associés aux schémas rhéologiques que nous avons vus dans ce chapitre ont des modules opérationnels sous forme de fractions rationnelles.

#### Exemple des modèles généralisés:

Pour le **modèle Maxwell généralisé** à  $n$  temps de relaxation, nous avons

$$E(p) = E_\infty + E_1 \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_1}} + E_2 \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_2}} + \dots + E_n \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_n}} \quad (71)$$

Pour le **modèle Kelvin-Voigt généralisé** à  $n$  temps de retards, nous avons

$$S(p) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{\bar{\tau}_1 E_1} \frac{1}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_1}} + \frac{1}{\bar{\tau}_2 E_2} \frac{1}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_2}} + \dots + \frac{1}{\bar{\tau}_n E_n} \frac{1}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_n}} \quad (72)$$

L'écriture dans le domaine de Laplace permet de passer du modèle Maxwell généralisé au modèle Kelvin-Voigt généralisé.

### 5.3.2 Modèles à spectre de temps continu

Le modèle Maxwell généralisé est un modèle avec un spectre de temps relaxation discret, c'est-à-dire avec un nombre fini de temps de relaxation. Or dans la pratique, son utilisation requière souvent un grand nombre de paramètres pour décrire le comportement fréquentiel des polymères aux abords de la relaxation  $\alpha$ . C'est pourquoi il existe dans la littérature des modèles permettant de décrire le comportement fréquentiel avec moins de paramètres. Ces modèles faisant intervenir des puissances non entières de la variable complexe  $p$  ont un spectre de temps continu. Nous citerons ici le modèle **Havriliak-Negami** qui a pour module opérationnel :

$$\hat{E}(p) = E_{\infty} + \frac{E_0 - E_{\infty}}{(1 + (p)^{\gamma})^{\delta}} \quad (73)$$

et comme module complexe :

$$E^*(\omega) = \hat{E}(p = j\omega) = E_{\infty} + \frac{E_0 - E_{\infty}}{(1 + (j\omega)^{\gamma})^{\delta}} \quad (74)$$

où  $E_{\infty} = E^*(\omega \rightarrow 0)$  est le module d'Young relaxé ;  $E_0 = E^*(\omega \rightarrow \infty)$  est le module instantané et  $\gamma$  et  $\delta$  des exposants positifs. Lorsque  $\gamma = 1$ , le modèle Havriliak-Negami (Havriliak et Negami 1967) est égal au modèle de Cole-Davidson (Davidson et Cole 1950) ; et lorsque  $\delta = 1$  il est égale au modèle de Cole-Cole (Cole et Cole 1941) qui est également appelé de Zener à dérivée fractionnaire. Une utilisation de ce modèle à seulement 4 paramètres pourra être trouvé dans (Rouleau 2013).

**Remarque** Si ces fonctions sont particulièrement simples à manipuler dans le domaine fréquentiel, leur transposition dans le domaine temporel demande l'utilisation de méthode numérique adaptées. Nous pouvons citer la méthode des collocations (Brenner et Suquet 2013) utilisée pour l'homogénéisation des matériaux viscoélastiques (André et al 2021). Elle repose sur l'approximation de la réponse fréquentielle par un modèle de Maxwell généralisé.

## 6 Bibliographie

André S, Boisse J, Noûs C (2021). An FFT solver used for virtual Dynamic Mechanical Analysis experiments: Application to a glassy/amorphous system and to a particulate composite. *Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics*, INRIA 1-19.

Bergstrom J S (2015). *Mechanics of solid polymers: theory and computational modeling*. William Andrew.

Besson J, Cailletaud G, Chaboche J-L, Forest F (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*, Hermes.

Brenner R, Suquet P (2013). Overall response of viscoelastic composites and polycrystals: exact asymptotic relations and approximate estimates. *International Journal of Solids and Structures* **50** : 1824-1838.

Bourbié T, Coussy O, Zinszner B (1986). Chap. 3 : Propagation des ondes et phénomènes vibratoires dans les milieux viscoélastiques. *In : Acoustique des milieux poreux* (No. 27). Editions Technip, 99-143.

- Cantat I, Cohen-Addad S, Elias F, Graner F, Höhler R, Pitois O, Rouyer F, Saint-Jalmes A (2010). Chap 4: Rhéologie. In : *Les mousses: structure et dynamique*. Belin 178-233.
- Chamoin L (2007). *Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolu par la méthode des éléments finis* (Doctoral dissertation, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan).
- Cole K S, Cole R H (1941). Dispersion and absorption in dielectrics I. Alternating current characteristics. *The Journal of chemical physics* **9** : 341-351.
- Coussot P (2012). *Rhéophysique la matière dans tous ses Etats*. EDP sciences.
- Davidson D W, Cole R H (1950). Dielectric relaxation in glycerine. *The Journal of Chemical Physics* **18** : 1417-1417.
- Detrez F (2008). *Nanomécanismes de déformation des polymères semi-cristallins: étude in situ par microscopie à force atomique et modélisation* (Doctoral dissertation, Université Lille I).
- Detrez F, Cantournet S, Seguela R (2011). Plasticity/damage coupling in semi-crystalline polymers prior to yielding: Micromechanisms and damage law identification. *Polymer* **52** : 1998-2008.
- Etienne S, David L (2002). Chap 5 : Viscoélasticité linéaire. In : *Introduction à la physique des polymères*. Dunod, 127-171.
- Gremaud G (2013). *Théorie eulérienne des milieux déformables: charges de dislocation et désinclinaison dans les solides*. PPUR Presses polytechniques.
- Halary J-L, Lauprêtre F, Monnerie L (2015). Chap 2 : Les comportements viscoélastiques. In : *Mécanique des matériaux polymères*, Belin, 65-93.
- Havriliak S, Negami S (1967). A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers. *Polymer* **8** : 161-210.
- Kausch H-H, Heymans N, Plummer C, Decroly P (2001). Chap 7 : Comportement élastique et viscoélastique linéaire. In : *Matériaux polymères: propriétés mécaniques et physiques* (Vol. 14). PPUR presses polytechniques, 195-242
- Kohlrusch F (1863). Ueber die elastische Nachwirkung bei der Torsion. *Annalen der physik*. **195** : 337-368.
- Lemaitre J, Chaboche J-L, Benallal A, Desmorat R (2009). *Mécanique des matériaux solides-3e éd*. Dunod.
- Nguyen Q-S (2000). Chap 2 : Thermodynamique et loi de comportement. In : *Stabilité et mécanique non linéaire*, Hermes, 37-64.
- Oswald P (2005). *Rhéophysique : Ou comment coule la matière*. Belin.
- Rouleau L (2013). *Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques* (Doctoral dissertation, Paris, CNAM).
- Simo J, Hughes T (2006). Chap 10: Viscoelasticity. In : *Computational inelasticity*. Springer, 336-373.
- Verdu J. (1984). *Vieillessement des plastiques* ; AFNOR Technique, Eyrolles.

Williams G, Watts D C (1970). Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function. *Transactions of the Faraday Society* **66** : 80-85.

Yvonnet J (2019). Chap 7: Linear Viscoelastic Materials. In : *Computational homogenization of heterogeneous materials with finite elements*. Springer, 123-144.

7 Annexe 1 Détails des calculs de la réponse temporelle du modèle de Zener à un chargement cyclique de charges-décharges

7.1 Evolution de la contrainte pour le cycle unitaire

$$\begin{aligned}\sigma^u(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left[ \sigma^{cr}(t) - 2\sigma^{cr}\left(t - \frac{T}{2}\right) + \sigma^{cr}(t - T) \right] \\ \sigma^u(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left[ \left( E_\infty t + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] \right) \mathcal{H}(t) \right. \\ &\quad - 2 \left( E_\infty \left(t - \frac{T}{2}\right) + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau_1}\right) \right] \right) \mathcal{H}\left(t - \frac{T}{2}\right) \\ &\quad \left. + \left( E_\infty(t - T) + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - T}{\tau_1}\right) \right] \right) \mathcal{H}(t - T) \right]\end{aligned}$$

Pour  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$

$$\sigma^u(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left( E_\infty t + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] \right)$$

Pour  $\frac{T}{2} \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}\sigma^u(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left\{ \left( E_\infty t + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] \right) - 2 \left( E_\infty \left(t - \frac{T}{2}\right) + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau_1}\right) \right] \right) \right\} \\ \sigma^u(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left( -E_\infty(t - T) + E_1 \tau_1 \left\{ \left( 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] \right) - 2 \left( 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] X \right) \right\} \right)\end{aligned}$$

En posant  $X = \exp\left[\frac{T}{2\tau_1}\right]$

$$\sigma^u(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left( -E_\infty(t - T) + E_1 \tau_1 \left\{ -1 + \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] (2X - 1) \right\} \right)$$

Pour  $t \geq T$

$$\begin{aligned}\sigma^u(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left[ \left( E_\infty t + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] \right) - 2 \left( E_\infty \left(t - \frac{T}{2}\right) + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) X \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( E_\infty(t - T) + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] X^2 \right] \right) \right] \\ \sigma^u(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left[ -E_\infty(t - T) + E_1 \tau_1 \left\{ -1 + \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] (2X - 1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left( E_\infty(t - T) + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] X^2 \right] \right) \right] \\ \sigma^u(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left[ E_1 \tau_1 \left\{ -1 + \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] (2X - 1) + 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] X^2 \right\} \right]\end{aligned}$$

$$\sigma^u(t) = \dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] (-X^2 + 2X - 1)$$

$$\sigma^u(t) = -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 (1 - X)^2 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right]$$

## 7.2 Contrainte lors de la charge du n-ième cycle ( $n \geq 2$ )

Lors de la charge du n-ième cycle, on a  $t \in [(n-1)T, (n-\frac{1}{2})T]$  et

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-2} \sigma^u(t - kT) + \dot{\varepsilon}_0 \sigma^{cr}(t - (n-1)T) \mathcal{H}(t - (n-1)T)$$

Or

$$\sigma^u(t - kT) = -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] X^{2k} (X - 1)^2$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-2} \sigma^u(t - kT) &= -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] (1 - X)^2 \sum_{k=0}^{n-2} X^{2k} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^u(t - kT) &= -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] (1 - X)^2 \frac{1 - X^{2n-2}}{1 - X^2} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^u(t - kT) &= -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] (1 - X)^2 \frac{1 - X^{2n-2}}{(1 + X)(1 - X)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^u(t - kT) &= -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] \frac{(1 - X^{2n-2})(1 - X)}{(1 + X)} \end{aligned}$$

Avec l'aide de la formule

$$\sum_{k=q}^p X^k = \frac{X^q - X^{p+1}}{1 - X}$$

D'où pour  $t \in [(n-1)T, (n-\frac{1}{2})T]$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] \frac{(1 - X^{2n-2})(1 - X)}{(1 + X)} \\ &\quad + \dot{\varepsilon}_0 \left( E_\infty(t - (n-1)T) + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] X^{2n-2} \right] \right) \\ \sigma(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty(t - (n-1)T) + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] \left( X^{2n-2} + \frac{(1 - X^{2n-2})(1 - X)}{(1 + X)} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty(t - (n-1)T) + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_1} \right] \left( X^{2n-2} \left( 1 - \frac{(1-X)}{(1+X)} \right) + \frac{(1-X)}{(1+X)} \right) \right) \right\}$$

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty(t - (n-1)T) + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_1} \right] \left( X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) + \frac{(1-X)}{(1+X)} \right) \right) \right\}$$

**Remarque :** Il est possible d'étendre ce résultat au modèle de Maxwell généralisé ; en remarquant dans un premier temps que la contrainte se décompose en une contribution quasi-statique  $\sigma_\infty(t)$  et une la branche de Maxwell  $\sigma_1(t)$  telles que

$$\sigma_\infty(t) = E_\infty \dot{\varepsilon}_0(t - (n-1)T) = E_\infty \varepsilon(t)$$

$$\sigma_1(t) = E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_1} \right] \left( X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) + \frac{(1-X)}{(1+X)} \right) \right)$$

Puis en ajoutant les contributions de chacun des branches de Maxwell  $\sigma_i(t)$  vérifiant

$$\sigma_i(t) = E_i \tau_i \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_i} \right] \left( X_i^{2n-2} \left( \frac{2X_i}{(1+X_i)} \right) + \frac{(1-X_i)}{(1+X_i)} \right) \right)$$

avec  $X_i = \exp \left[ \frac{T}{2\tau_i} \right]$ .

### 7.3 Contrainte lors de la décharge du n-ième cycle ( $n \geq 2$ )

Lors de la décharge du n-ième cycle, on a  $t \in \left[ \left( n - \frac{1}{2} \right) T, T \right]$  et

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty(t - (n-1)T) + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_1} \right] \left( X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) + \frac{(1-X)}{(1+X)} \right) \right) \right\} \\ - 2\dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty \left( t - \left( n - \frac{1}{2} \right) T \right) + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_1} \right] X^{2n-1} \right) \right\}$$

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty(t - nT) + E_1 \tau_1 \left( -1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_1} \right] \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} + X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X^{2n-1} \right) \right) \right\}$$

### 7.4 Valeur des minima et maxima pour le n-ième cycle

#### 7.4.1 Valeur du n-ième minima

$$\sigma_n^{min} = \sigma(nT) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty(nT - nT) \right. \\ \left. + E_1 \tau_1 \left( -1 - \exp \left[ -\frac{nT}{\tau_1} \right] \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} + X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X^{2n-1} \right) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_n^{min} &= \dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \left( -1 - X^{-2n} \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} + X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X^{2n-1} \right) \right) \\ \sigma_n^{min} &= -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \left( 1 + \frac{(1-X)}{(1+X)} X^{-2n} + \frac{2X^{-1}}{(1+X)} - 2X^{-1} \right) \\ \sigma_n^{min} &= -\dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \frac{(X-1)}{(1+X)} (1 - X^{-2n})\end{aligned}$$

#### 7.4.2 Valeur du n-ième maxima

$$\begin{aligned}\sigma_n^{max} &= \sigma \left( \left( n - \frac{1}{2} \right) T \right) = \\ &= \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty \left( \left( n - \frac{1}{2} \right) T - nT \right) \right. \\ &\quad \left. + E_1 \tau_1 \left( -1 - \exp \left[ -\frac{\left( n - \frac{1}{2} \right) T}{\tau_1} \right] \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} + X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X^{2n-1} \right) \right) \right\} \\ \sigma_n^{max} &= \dot{\varepsilon}_0 \left\{ \frac{E_\infty T}{2} + E_1 \tau_1 \left( -1 - X^{-2n+1} \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} + X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X^{2n-1} \right) \right) \right\} \\ \sigma_n^{max} &= \dot{\varepsilon}_0 \left\{ \frac{E_\infty T}{2} - E_1 \tau_1 \left( 1 + \frac{2}{1+X} - 2 + \frac{X(1-X)}{(1+X)} X^{-2n} \right) \right\} \\ \sigma_n^{max} &= \dot{\varepsilon}_0 \left\{ \frac{E_\infty T}{2} - E_1 \tau_1 \left( \frac{1-X}{1+X} + \frac{(1-X)}{(1+X)} X^{-2n+1} \right) \right\} \\ \sigma_n^{max} &= \dot{\varepsilon}_0 \left\{ \frac{E_\infty T}{2} + E_1 \tau_1 \frac{(X-1)}{(1+X)} (1 + X^{-2n+1}) \right\}\end{aligned}$$

#### 7.5 Module dynamique du n-ième cycle

$$\begin{aligned}K_n &= \frac{\Delta \sigma_n}{\Delta \varepsilon} = \frac{\sigma_n^{max} - \sigma_n^{min}}{\varepsilon_m - 0} = \frac{\sigma_n^{max} - \sigma_n^{min}}{\varepsilon_m} \\ K_n &= \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\varepsilon_m} \left\{ \frac{E_\infty T}{2} + E_1 \tau_1 \frac{(X-1)}{(1+X)} (1 + X^{-2n+1}) + E_1 \tau_1 \frac{(X-1)}{(1+X)} (1 - X^{-2n}) \right\}\end{aligned}$$

$$\text{Or } \varepsilon_m = \dot{\varepsilon}_0 \frac{T}{2}$$

$$K_n = E_\infty + 2E_1 \frac{\tau_1}{T} \frac{(X-1)}{(1+X)} (2 + X^{-2n+1} - X^{-2n})$$

#### 7.6 Cycle stabilisé

Pour obtenir le cycle stabilisé, il suffit de faire tendre n vers l'infini. Or lorsque  $n \rightarrow \infty$  le temps tend également vers l'infini. Pour pouvoir passer à la limite sans avoir deux

quantités qui divergent, nous introduisons le changement de variable suivant  $t = (n - 1)T + s$ . A noter que  $s$  est le temps en prenant l'origine des temps au début du  $n$ -ième cycle. On a pour la charge

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty(t - (n - 1)T) + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_1} \right] \left( X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) + \frac{(1-X)}{(1+X)} \right) \right) \right\}$$

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty s + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{(n-1)T + s}{\tau_1} \right] \left( X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) + \frac{(1-X)}{(1+X)} \right) \right) \right\}$$

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty s + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{s}{\tau_1} \right] X^{-2n+2} \left( X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) + \frac{(1-X)}{(1+X)} \right) \right) \right\}$$

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty s + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{s}{\tau_1} \right] \left( \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) + \frac{(1-X)}{(1+X)} X^{-2n+2} \right) \right) \right\}$$

Puisque  $X = \exp \left[ \frac{T}{2\tau_1} \right] > 1$ , nous avons  $\lim_{n \rightarrow \infty} X^{-n} = 0$  ce qui conduit à l'expression suivante

pour la charge

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ E_\infty s + E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{s}{\tau_1} \right] \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) \right) \right\}$$

De façon analogue on obtient pour la décharge

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty(t - nT) + E_1 \tau_1 \left( -1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau_1} \right] \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} + X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X^{2n-1} \right) \right) \right\}$$

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty(s - T) + E_1 \tau_1 \left( -1 - \exp \left[ -\frac{(n-1)T + s}{\tau_1} \right] \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} + X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X^{2n-1} \right) \right) \right\}$$

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty(s - T) + E_1 \tau_1 \left( -1 - \exp \left[ -\frac{s}{\tau_1} \right] X^{-2n+2} \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} + X^{2n-2} \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X^{2n-1} \right) \right) \right\}$$

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty(s - T) + E_1 \tau_1 \left( -1 - \exp \left[ -\frac{s}{\tau_1} \right] \left( \frac{(1-X)}{(1+X)} X^{-2n+2} + \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) - 2X \right) \right) \right\}$$

Après passage à la limite  $n \rightarrow \infty$

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty(s - T) + E_1 \tau_1 \left( -1 - \exp \left[ -\frac{s}{\tau_1} \right] \left( \left( \frac{2X}{(1+X)} - 2 \frac{X + X^2}{(1+X)} \right) \right) \right) \right\}$$

$$\sigma(s) = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ -E_\infty(s - T) + E_1 \tau_1 \left( -1 + \exp \left[ -\frac{s}{\tau_1} \right] \left( \frac{2X^2}{(1+X)} \right) \right) \right\}$$

De plus, en remarquant que la valeur  $s$  est reliée à la déformation  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 s \quad \text{pour la charge}$$

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 (T - s) \quad \text{pour la décharge}$$

On obtient la contrainte en fonction de la déformation pour le cycle stabilisé

$$\sigma(\varepsilon) = E_\infty \varepsilon + \dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}_0 \tau_1} \right] \left( \frac{2X}{(1+X)} \right) \right) \quad \text{pour la charge}$$

$$\sigma(\varepsilon) = E_\infty \varepsilon + \dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \left( -1 + \exp \left[ \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}_0 \tau_1} \right] \left( \frac{2}{(1+X)} \right) \right) \quad \text{pour la décharge}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la continuité de la contrainte  $\sigma$  aux valeurs extrêmes de la déformation, c'est-à-dire  $\varepsilon = 0$  et  $\varepsilon = \varepsilon_m$ . Ces valeurs sont respectivement l'asymptote de la contrainte minimale et l'asymptote de la contrainte maximale

$$\sigma_\infty^{\min} = \sigma(\varepsilon = 0) = \dot{\varepsilon}_0 E_1 \tau_1 \left( -1 + \frac{2}{(1+X)} \right) = \varepsilon_m E_1 \frac{\tau_1}{T} \left( \frac{1-X}{1+X} \right)$$

$$\sigma_\infty^{\max} = \sigma(\varepsilon = \varepsilon_m) = E_\infty \varepsilon_m - \sigma_\infty^{\min}$$

On en déduit directement

$$\Delta\sigma^0 = \sigma_\infty^{\max} - \sigma_\infty^{\min} = E_\infty \varepsilon_m - 2\sigma_\infty^{\min}$$

Et le module dynamique asymptotique

$$K_\infty = E_\infty + 4E_1 \frac{\tau_1}{T} \left( \frac{X-1}{1+X} \right)$$

## 7.7 Energie dissipée spécifique lors du n-ième cycle

Pour déterminer l'énergie dissipée spécifique du n-ième cycle nous allons procéder par récurrence, nous allons d'abord déterminer l'énergie dissipée spécifique lors du premier cycle puis l'énergie dissipée spécifique du n-ième cycle en fonction de celle du (n-1)-ième cycle.

### 7.7.1 Energie dissipée lors du premier cycle

$$\mathfrak{D}_1 = \int_0^T \sigma(u) \frac{d\varepsilon}{dt}(u) du$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_1 &= \dot{\varepsilon}_0 \int_0^{\frac{T}{2}} \sigma(u) du - \dot{\varepsilon}_0 \int_{\frac{T}{2}}^T \sigma(u) du \\ \mathfrak{D}_1 &= (\dot{\varepsilon}_0)^2 \left( \int_0^{\frac{T}{2}} \sigma^{cr}(u) du - \int_{\frac{T}{2}}^T \left( \sigma^{cr}(u) - 2\sigma^{cr}\left(u - \frac{T}{2}\right) \right) du \right) \\ \mathfrak{D}_1 &= (\dot{\varepsilon}_0)^2 (3J[0] - J[1])\end{aligned}$$

Où

$$J[n] = \int_{n\frac{T}{2}}^{(n+1)\frac{T}{2}} \sigma^{cr}(u) du = \int_0^{\frac{T}{2}} \sigma^{cr}\left(u + n\frac{T}{2}\right) du = \int_{(n+q)\frac{T}{2}}^{(n+q+1)\frac{T}{2}} \sigma^{cr}\left(u - q\frac{T}{2}\right) du \quad \forall q \leq n$$

$$J[n] = \int_{n\frac{T}{2}}^{(n+1)\frac{T}{2}} \left( E_\infty u + E_1 \tau_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{u}{\tau_1}\right) \right] \right) du$$

$$J[n] = \left[ \frac{1}{2} E_\infty u^2 \right]_{n\frac{T}{2}}^{(n+1)\frac{T}{2}} + \left[ E_1 \tau_1 \left( u + \tau_1 \exp\left(-\frac{u}{\tau_1}\right) \right) \right]_{n\frac{T}{2}}^{(n+1)\frac{T}{2}}$$

$$J[n] = \frac{1}{8} E_\infty T^2 (2n+1) + E_1 \tau_1 \frac{T}{2} + E_1 \tau_1^2 \exp\left(-\frac{nT}{2\tau_1}\right) \left( \exp\left(-\frac{T}{2\tau_1}\right) - 1 \right)$$

$$J[n] = \frac{1}{8} E_\infty T^2 (2n+1) + E_1 \frac{T^2}{2} \frac{\tau_1}{T} + E_1 T^2 \left( \frac{\tau_1}{T} \right)^2 X^{-n} (X^{-1} - 1)$$

Donc

$$\mathfrak{D}_1 = (\dot{\varepsilon}_0)^2 E_1 T^2 \left( \frac{\tau_1}{T} + \left( \frac{\tau_1}{T} \right)^2 (X^{-1} - 1)(3 - X^{-1}) \right)$$

$$\mathfrak{D}_1 = 4\varepsilon_m^2 E_1 \left( \frac{\tau_1}{T} + \left( \frac{\tau_1}{T} \right)^2 \left( \exp\left[-\frac{T}{2\tau_1}\right] - 1 \right) \left( 3 - \exp\left[-\frac{T}{2\tau_1}\right] \right) \right)$$

On constate que  $\mathfrak{D}_1$  est proportionnel au carré de la déformation maximale  $\varepsilon_m$  et au module  $E_1$  de la branche de Maxwell. Dans le cas où  $\frac{T}{\tau_1} \ll 1$ , on a

$$\mathfrak{D}_1 \approx \frac{1}{3} \varepsilon_m^2 E_1 \frac{T}{\tau_1} \ll 1$$

Dans le cas où  $\frac{T}{\tau_1} \gg 1$ , on a

$$\mathfrak{D}_1 \approx 4\varepsilon_m^2 E_1 \frac{\tau_1}{T} \ll 1$$

### 7.7.2 Relation de récurrence pour l'énergie dissipée spécifique

L'énergie dissipée spécifique durant le cycle  $(n+1)$  est :

$$\mathfrak{D}_{n+1} = \mathfrak{D}_1 + \mathcal{A}[n].$$

Le terme  $\mathcal{A}[n]$  correspond l'énergie dissipée spécifique due à la réponse en contrainte du premier cycle :

$$\mathcal{A}[n] = (\dot{\varepsilon}_0)^2 \left\{ \int_{(2n)\frac{T}{2}}^{(2n+1)\frac{T}{2}} \left( \sigma^{cr}(u) - 2\sigma^{cr}\left(u - \frac{T}{2}\right) + \sigma^{cr}(u - T) \right) du \right. \\ \left. - \int_{(2n+1)\frac{T}{2}}^{(2n+2)\frac{T}{2}} \left( \sigma^{cr}(u) - 2\sigma^{cr}\left(u - \frac{T}{2}\right) + \sigma^{cr}(u - T) \right) du \right\}$$

En utilisant la définition de l'intégrale  $J[\ ]$ , on a

$$\mathcal{A}[n] = (\dot{\varepsilon}_0)^2 \{-J[2n+1] + 3J[2n] - 3J[2n-1] + J[2n-2]\}$$

$$\mathcal{A}[n] = (\dot{\varepsilon}_0)^2 E_1 T^2 \left(\frac{\tau_1}{T}\right)^2 X^{-2n+2} (X^{-1} - 1)(-X^{-3} + 3X^{-2} - 3X^{-1} + 1)$$

$$\mathcal{A}[n] = \mathcal{A}[1] X^{-2n+2}$$

avec

$$\mathcal{A}[1] = 4E_1 \varepsilon_m^2 \left(\frac{\tau_1}{T}\right)^2 (X^{-1} - 1)(-X^{-3} + 3X^{-2} - 3X^{-1} + 1) = -4E_1 \varepsilon_m^2 \left(\frac{\tau_1}{T}\right)^2 (1 - X^{-1})^4 < 0$$

En utilisant la relation de récurrence, on en déduit

$$\mathfrak{D}_{n+1} = \mathfrak{D}_n + \mathcal{A}[n] = \mathfrak{D}_{n-1} + \mathcal{A}[n-1] + \mathcal{A}[n] = \dots = \mathfrak{D}_1 + \sum_{k=1}^n \mathcal{A}[k]$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{A}[k] = \sum_{k=1}^n \mathcal{A}[1] X^2 X^{-2k} = \mathcal{A}[1] X^2 \frac{X^{-2} - X^{-2n-2}}{1 - X^{-2}} = \mathcal{A}[1] \frac{1}{1 - X^{-2}} (1 - X^{-2n})$$

Donc

$$\mathfrak{D}_{n+1} - \mathfrak{D}_1 = -4E_1 \varepsilon_m^2 \left(\frac{\tau_1}{T}\right)^2 \frac{(1 - X^{-1})^4}{1 - X^{-2}} (1 - X^{-2n})$$

Qu'on peut réécrire

$$\mathfrak{D}_{n+1} = \mathfrak{D}_1 + C_1 (1 - X^{-2n})$$

où  $C_1$  est une constante qui dépend du rapport  $T/\tau_1$

$$C_1 = -4E_1 \varepsilon_m^2 \left(\frac{\tau_1}{T}\right)^2 \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{T}{2\tau_i}\right)\right)^3}{1 + \exp\left(-\frac{T}{2\tau_i}\right)}$$

On en déduit la dissipation du cycle stabilisé

$$\mathcal{D}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_1 + \mathcal{C}_1$$

## 8 Annexe 2 Rappel des propriétés usuelles de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace  $\mathcal{L}_p[\ ]$  transforme une fonction  $f(t)$  causale du temps  $t$  (c'est-à-dire que  $f(t) = 0 \forall t < 0$ ) en une fonction d'une variable complexe  $p$ , notée  $\hat{f}(p)$ .

### 8.1 Définition de la transformée de Laplace

Pour toute fonction  $f(t)$  causale ( $f(t) = 0 \forall t < 0$ )

$$\mathcal{L}_p[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

### 8.2 Transformées usuelles des fonctions causales

Tableau 2

$f(t), t \geq 0$	$\hat{f}(p)$	$f(t), t \geq 0$	$\hat{f}(p)$
Impulsion unité (Dirac) $\delta(t)$	1	Échelon unité 1	$\frac{1}{p}$
Rampe $t$	$\frac{1}{p^2}$	Polynôme $t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Sinus $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$	Cosinus $\cos(\omega t)$	$\frac{p}{\omega^2 + p^2}$
Exponentielle $e^{-at}$	$\frac{1}{p + a}$	Loi de Davidson-Cole $\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-t)$	$\frac{1}{(1+p)^\beta}$ $\forall \beta > 0$
Sinus amorti $e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{\omega^2 + (p+a)^2}$	Cosinus amorti $e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{\omega^2 + (p+a)^2}$

**Remarque** La tableau n'est valable que pour les fonctions causales telles que  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ . Dans le cas où la fonction  $f(t) \neq 0$  pour  $t < 0$ , il faut avoir recours à un changement de variable. La fonction  $\Gamma(z)$  est la fonction gamma qui vérifie  $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$  et  $\Gamma(1) = 1$ . Elle généralise la notion de factoriel à l'ensemble des nombres complexes.

### 8.3 Propriétés

#### 8.3.1 Linéarité

$$\mathcal{L}_p[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \hat{f}(p) + \beta \hat{g}(p) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

#### 8.3.2 Dérivée

$$\mathcal{L}_p \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = p \hat{f}(p) - f(t=0^+)$$

### 8.3.3 Dérivée d'ordre n

$$\mathcal{L}_p \left[ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n \hat{f}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \frac{d^k f}{dt^k} (t = 0^+)$$

#### Exemple

A l'équation différentielle

$$a \frac{d^2 s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

On associe l'équation algébrique en p dans l'espace de Laplace

$$\hat{s}(p)[ap^2 + bp + c] = \hat{e}(p)$$

### 8.3.4 Théorème de la valeur initiale

Si la transformée de Laplace de  $f(t)$  existe alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \hat{f}(p)$$

### 8.3.5 Théorème de la valeur finale

Si la transformée de Laplace de  $f(t)$  existe alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{f}(p) \quad \text{si } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \text{ existe}$$

## 8.4 Transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace inverse  $\mathcal{L}_p^{-1}[\ ]$  transforme une fonction  $\hat{f}(p)$  en une fonction causale  $f(t)$ .

### 8.4.1 Définition

L'inversion de la transformation de Laplace s'effectue par le biais d'une intégrale dans le plan complexe :

$$\mathcal{L}_p^{-1}[\hat{f}(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} \hat{f}(p) e^{pt} dp$$

où  $\gamma$  est un contour choisi de sorte que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que  $\gamma$  soit supérieur à la partie réelle de toute singularité de  $\hat{f}(p)$  et qu'à l'infini,  $|\hat{f}(p)|$  tende vers 0 au moins aussi rapidement que  $1/|p|^2$ .

### 8.4.2 Utilisation

Dans la pratique, nous n'utilisons jamais la définition intégrale. Notamment, lorsque la fonction  $\hat{f}(p)$  est une fraction rationnelle, le plus simple est de faire une décomposition en éléments simple afin d'utiliser les transformations usuelles du **Tableau 2**.

#### Exemple :

Nous cherchons à trouver la fonction  $f(t)$  qui a pour transformée de Laplace la fraction rationnelle suivante

$$\hat{f}(p) = \frac{p + 2}{(p + 5)(p + 10)}$$

La première étape est de faire une décomposition en élément simple, par exemple à l'aide du logiciel de calcul formel WolframAlpha gratuit et accessible en ligne sur [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com).

$$\hat{f}(p) = \frac{8}{5(p + 10)} - \frac{3}{5(p + 5)}$$

Ensuite, nous reconnaissons la somme de deux transformées d'exponentielles ce qui nous permet de déduire que

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{8}{5}e^{-10t} - \frac{3}{5}e^{-5t} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

A noter qu'il est également possible d'utiliser le logiciel WolframAlpha pour calculer directement la transformée de Laplace inverse.