



# Dynamique des solides

Fabrice DETREZ



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Approche système . . . . .	5
1.1.1	Définition . . . . .	5
1.1.2	Caractéristiques principales . . . . .	5
1.1.3	Comment utiliser l'approche système . . . . .	5
1.2	Intérêt de la dynamique des solides indéformables en génie mécanique . . . . .	6
<b>I</b>	<b>Dynamique du point</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Rappel de dynamique du point</b>	<b>9</b>
2.1	Démarche d'une étude de dynamique . . . . .	9
2.2	Analyse du système et modélisation . . . . .	10
2.3	Formulation du problème : Écrire les équations du mouvement . . . . .	18
2.3.1	Préambule : cinématique du point . . . . .	18
2.3.2	Principe Fondamentale de la Dynamique . . . . .	22
2.3.3	Exemples . . . . .	23
2.3.4	Synthèse sur les actions mécaniques . . . . .	26
2.4	Résolution des équations du mouvements . . . . .	27
2.4.1	Balistique . . . . .	27
2.4.2	Calcul de la force d'un actionneur . . . . .	30
2.4.3	Oscillateur : Système masse ressort amortisseur . . . . .	31
2.5	Analyse . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Systèmes dissipatifs</b>	<b>39</b>
3.1	Puissance . . . . .	39
3.2	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	41
3.3	Frottement visqueux . . . . .	43
3.4	Frottement sec . . . . .	43
3.5	Exemples . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Systèmes contraints</b>	<b>51</b>
4.1	Pendule simple . . . . .	51
4.1.1	Stratégie 1 : Méthode de pénalisation . . . . .	52
4.1.2	Stratégie 2 : Ajout d'une inconnue de force . . . . .	54
4.1.3	Résolution . . . . .	55
4.1.4	Comparaison des deux méthodes . . . . .	57
4.2	Notion d'hyperstatisme . . . . .	57
4.3	Paramétrages conformes dans un système de points matériels . . . . .	58
4.4	Principe des puissances virtuelles . . . . .	61
4.4.1	Énoncé du principe . . . . .	61
4.4.2	Intérêt pour un système contrainte . . . . .	61
4.5	Exemples . . . . .	61

<b>II</b>	<b>Dynamique du solide</b>	<b>65</b>
<b>5</b>	<b>Cinématique du solide - Espace des états d'un solide indéformable</b>	<b>67</b>
5.1	Repère local . . . . .	67
5.2	Espace de configuration . . . . .	68
5.3	Espace des états d'un solide . . . . .	72
5.4	Vecteur taux de rotation . . . . .	73
5.5	Mise à jour de l'espace de configuration à partir de l'espace des états . . . . .	75
5.6	Champs de vecteurs vitesse relative d'un solide $S_1$ par rapport à un solide $S_0$ . . . . .	77
5.7	Composition de mouvement . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Modélisation des systèmes de solides indéformables</b>	<b>81</b>
6.1	Paramétrage des liaisons cinématiques . . . . .	82
6.2	Inventaires des liaisons mécaniques normalisées . . . . .	84
6.3	Modélisation des mécanismes . . . . .	94
6.4	Éléments de théorie des mécanismes . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Dynamique d'un ensemble de points matériels</b>	<b>103</b>
7.1	Rappel de dynamique du point matériel . . . . .	103
7.2	Principes généraux et stratégie de modélisation . . . . .	104
7.3	Cinématique . . . . .	105
7.4	Cinétique . . . . .	105
7.5	Dynamique . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Dynamique des solides indéformables</b>	<b>119</b>
4.1	Principe Fondamentale de la Dynamique . . . . .	119
4.1.1	Énoncé du Principe Fondamentale de la Dynamique . . . . .	119
4.1.2	Formulation d'un problème de dynamique du solide . . . . .	119
4.1.3	Rappel sur les actions mécaniques . . . . .	120
4.2	Cinétique . . . . .	122
4.2.1	Moments inertiels d'un solide . . . . .	123
4.2.2	Grandeurs cinétiques . . . . .	126
4.2.3	Grandeurs dynamiques . . . . .	127
4.2.4	Cas particuliers à absolument connaître . . . . .	127
4.2.5	Cas d'un système $\Sigma$ constitué de $N$ solides . . . . .	128
4.3	Le torseur en mécanique des solides indéformables . . . . .	130
4.4	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	132
4.4.1	Énoncé du théorème de l'énergie cinétique (TEC) . . . . .	132
4.4.2	Utilisation du théorème du TEC . . . . .	132
4.4.3	Calcul de l'énergie cinétique . . . . .	132
4.4.4	Calcul des puissances . . . . .	133
4.5	Comment déterminer les lois du mouvement . . . . .	137
4.5.1	Mécanisme en chaîne ouverte . . . . .	137
4.5.2	Mécanisme en chaîne fermée . . . . .	138
4.6	L'effet gyroscopique . . . . .	140
4.7	Équilibrage statique et dynamique des pièces en rotation . . . . .	142
4.7.1	Équilibrage statique . . . . .	142

4.7.2	Équilibrage dynamique . . . . .	143
-------	---------------------------------	-----

### **III Mathématique pour l'ingénieur** **147**

#### **A Rappels d'analyse** **149**

A.1	Trigonométrie . . . . .	149
A.2	Dérivée d'une fonction . . . . .	150
A.3	Rappel sur les Nombres Complexes . . . . .	151
A.4	Intégration . . . . .	153
A.5	Équations différentielles ordinaires linéaires . . . . .	155
A.5.1	EDO linéaire du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	156
A.5.2	Équation Différentielle Linéaire du Second Ordre à Coefficients Constants	157

#### **B Quelques éléments de géométrie vectorielle** **161**

B.1	Les vecteurs . . . . .	161
B.2	Produit scalaire . . . . .	162
B.3	Produit vectoriel . . . . .	163
B.4	Dérivée d'un vecteur . . . . .	165

#### **C Intégration numérique des équations du mouvement** **169**

C.1	Démarche de résolution numérique d'une EDO . . . . .	169
C.2	Exemple : pendule simple . . . . .	171
C.3	Exemple 2 : double pendule . . . . .	175

#### **D Rappel sur les matrices $3 \times 3$** **177**

D.1	Définition d'une matrice $3 \times 3$ . . . . .	177
D.2	Produit matrice-vecteur . . . . .	177
D.3	Produit de matrices . . . . .	178
D.4	Transposée d'une matrice . . . . .	179
D.5	Déterminant d'une matrice $3 \times 3$ . . . . .	180
D.6	Inverse d'une matrice $3 \times 3$ . . . . .	180
D.7	Matrice orthogonale . . . . .	181
D.8	Matrices de rotation dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	181
D.9	Changement de base dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	182



---

# INTRODUCTION

## 1.1 Approche système

### 1.1.1 Définition

L'approche système est une méthodologie d'analyse qui permet :

- d'étudier** un système dans sa globalité,
- de modéliser** les relations entre ses composants,
- d'évaluer** ses comportements dynamiques,
- d'optimiser** ses performances en fonction de contraintes, d'objectifs et d'interactions internes/externes.

### 1.1.2 Caractéristiques principales

**Globalité** : On analyse le système dans son ensemble, pas seulement ses composants isolés.

**Interaction** : Les composants sont interconnectés ; leurs interactions produisent des effets émergents.

**Finalité** : Chaque système est conçu pour remplir une fonction ou atteindre un objectif spécifique.

**Hiérarchie** : Les systèmes peuvent être emboîtés (un sous-système peut appartenir à un système plus grand).

**Boucles de rétroaction** : Les effets peuvent influencer les causes, notamment dans les systèmes complexes et dynamiques.

### 1.1.3 Comment utiliser l'approche système

1. Définir le système
  - But du système : Quelle est sa fonction globale ?
  - Limites du système : Où s'arrête le système ? Qu'est-ce qui est à l'intérieur (les sous-systèmes) et qu'est-ce qui est dans l'environnement ?
  - Acteurs et parties prenantes : Qui interagit avec le système (utilisateur, opérateur, client, réseau, etc.) ?
2. Identifier les entrées et les sorties

- Entrées : Ce que le système reçoit de l'extérieur (matière, énergie, informations).
  - Sorties : Ce que le système produit vers l'extérieur.
3. Décomposer en sous-systèmes
    - Identifier les composants ou blocs fonctionnels internes.
    - Décrire leurs fonctions partielles et leurs interactions.
    - Construire un organigramme fonctionnel ou un S.A.F. (Système d'Aide à la Fonction).
  4. Analyser les flux et les interactions
    - Étudier les flux de matière, d'énergie et d'information entre les sous-systèmes.
    - Identifier les boucles de rétroaction (feedback).
    - Utiliser éventuellement un diagramme SADT ou SysML pour représenter cela.

## 1.2 Intérêt de la dynamique des solides indéformables en génie mécanique

La dynamique du solide indéformable constitue un lien fondamental entre modélisation fonctionnelle, comportement réel et pilotage du système. Elle permet en outre de :

- de traduire les exigences fonctionnelles (précision, rapidité, sécurité) en exigences mécaniques,
- de fiabiliser la conception et la validation des composants,
- de coordonner efficacement les choix mécaniques, électrotechniques et de commande.

Elle permet en outre de :

**Dimensionnement des composants** La dynamique permet de calculer les efforts (forces, moments) subis par les composants en fonction de l'accélération, de la masse et des conditions d'utilisation. Ces résultats sont essentiels pour :

- déterminer les sollicitations maximales (inertie, chocs),
- dimensionner correctement les arbres, roulements, fixations, etc.

**Choix des actionneurs** La dynamique permet de :

- estimer les couples et puissances nécessaires à l'entraînement,
- choisir un actionneur adapté aux exigences de performance (vitesse, couple, précision).

**Commande des systèmes** Une modélisation dynamique fiable est indispensable pour :

- étudier la stabilité d'un système autour d'un point de fonctionnement,
- prédire la réponse du système à une action de commande,
- concevoir des correcteurs adaptés (PID, retour d'état, commande prédictive),
- gérer les limites physiques comme les saturations moteurs.
- générer les bases de données nécessaires à l'entraînement des réseaux de neurones (IA) pour la commande de robots complexes

**Optimisation** La dynamique est également utilisée dans les études d'optimisation :

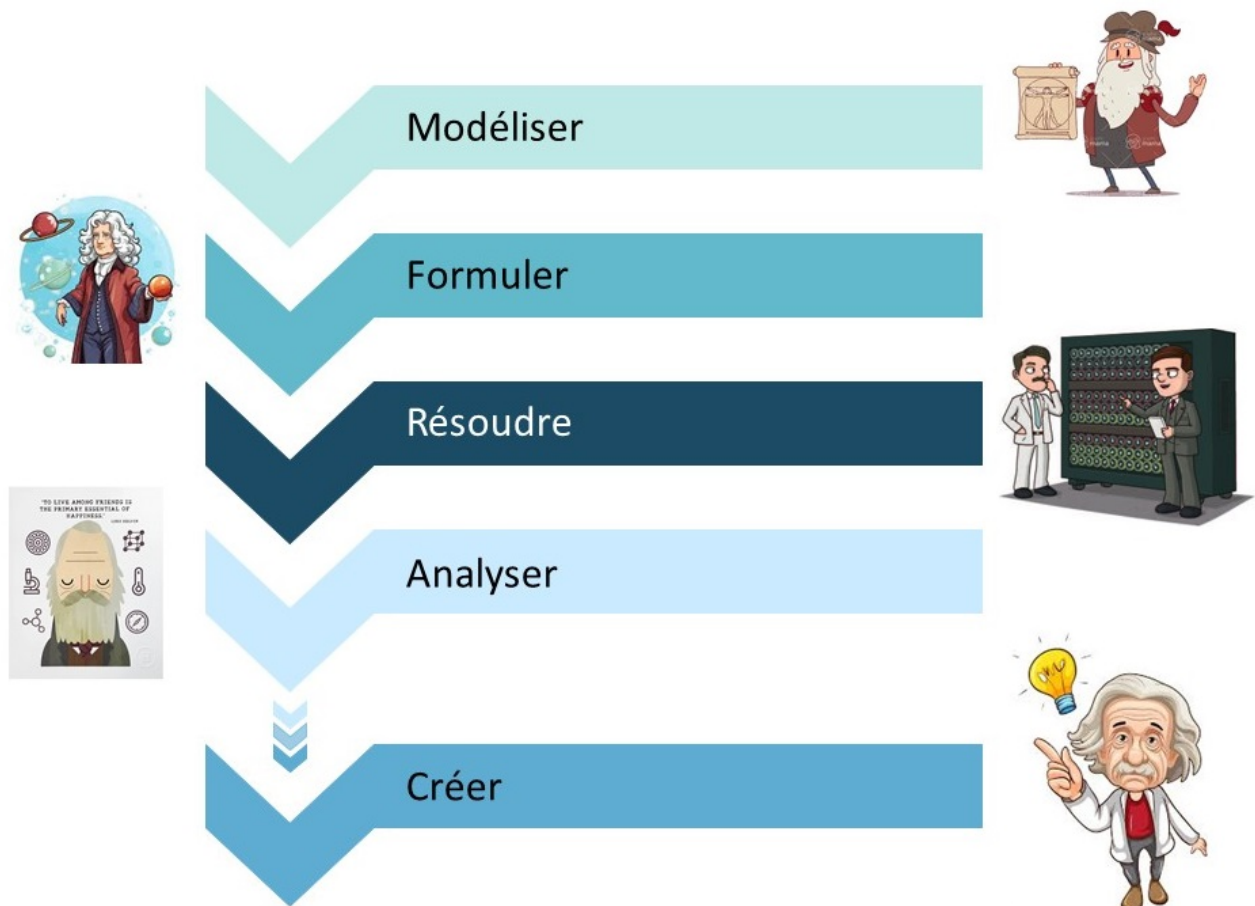
- minimisation de la consommation énergétique,
- réduction des charges dynamiques (usure, vibration, bruit),
- amélioration des performances globales du système.

**Première partie**  
**Dynamique du point**



## RAPPEL DE DYNAMIQUE DU POINT

### 2.1 Démarche d'une étude de dynamique



#### 1. Analyse du système et modélisation

- Définir le *système* : point matériel de masse  $m$ , liaisons éventuelles, milieu (air, fluide, contact).
- Schématiser clairement le système avec une figure.

- Poser les *hypothèses* : frottements négligés ou non, champ de pesanteur uniforme, planéité du mouvement, etc.

## 2. Écriture des équations du mouvement

- Choix de la formulation du problème : Principe des Puissances virtuelles (**PPV**) ; Principe Fondamentale de la Dynamique (**PFD**) ; Théorème de l'énergie cinétique (**TEC**) ; Équations de Lagrange
- Exprimer en composantes cartésiennes ou coordonnées généralisées  $q_i$ .
- Obtenir une (ou plusieurs) équation(s) différentielle(s) du second ordre.

## 3. Résolution des équations

- Solutions analytiques pour les systèmes linéaires (mouvement uniformément accéléré, oscillateur harmonique).
- Recours à l'intégration numérique pour les systèmes complexes ou non-linéaires.
- Conditions initiales.
- Conditions aux limites.

## 4. Interprétation et vérification

- Analyser les résultats : Tracer les efforts de liaisons, la puissance d'entrée, la puissance de sortie, la puissance dissipée, calculer le rendement.
- Vérifier la cohérence dimensionnelle et physique : unités, ordre de grandeurs.
- Comparer avec des résultats expérimentaux et/ou d'autres modélisations et/ou des résultats existants sur des systèmes similaires.

# 2.2 Analyse du système et modélisation

## Hypothèses classiques

### 1. Définir précisément le système étudié

- Schéma système ;
- Nombre de points ;
- Liaison(s) éventuelle(s) ;
- Milieu extérieur.

### 2. Dimension de l'espace physique

- Cadre général (3D) ;
- Mouvement plan (2D) ;
- Mouvement rectiligne (1D).

### 3. Champ de pesanteur

- Uniforme ;
- Négligé (l'action de pesanteur est négligée devant les autres actions mécaniques) ;

### 4. Effet d'inertie

- Pris en compte ;
- Négligé (hypothèse d'évolution quasi-statique, masse négligeable).

### 5. Effet dissipatif

- Système conservatif, pas de dissipation.
- Frottement visqueux ;
- Frottement sec.

### 6. Choix d'un référentiel galiléen, $\mathcal{R}_g$

- Référentiel héliocentrique : Il prend le Soleil comme centre. Utilisé en astrophysique, mécanique céleste et pour décrire les orbites planétaires avec précision.
- Référentiel géocentrique : C'est un référentiel où le centre de la Terre est pris comme origine. Il est utilisé notamment en astronomie ou en géophysique.
- **Le référentiel terrestre** : liée à la surface de la terre. Il est valide pour les mouvements proches de la surface terrestre (malgré la rotation de la Terre). Ce référentiel est adéquat pour la plupart des applications d'ingénierie, tant que les effets inertiels dus à la rotation terrestre sont négligeables.

## Espace de configuration $\mathcal{Q}$

L'espace des configurations  $\mathcal{Q}$  est l'ensemble de toutes les positions géométriquement possibles d'un système compte tenu des contraintes qui lui sont imposées. Mathématiquement, on introduit un ensemble de "coordonnées généralisées"  $q_i$  ( $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ ).

L'ensemble  $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$  définit les  $N$  degrés de liberté du système (*ddl*). Les *ddl* sont des fonctions du temps  $t$ , qui rassemblent toutes les informations nécessaires pour décrire la position du système à un instant  $t$ .

## Espace des états $T\mathcal{Q}$

Pour décrire le mouvement d'un système, la position seule ne suffit pas et il est nécessaire de connaître également les vitesses. C'est la raison pour laquelle, nous définissons l'espace d'état  $T\mathcal{Q}$ , tel que

$$T\mathcal{Q} = \{(q_i, \dot{q}_i), q_i \in \mathcal{Q}, \dot{q}_i \in T\mathcal{V}\}.$$

L'espace d'état est l'ensemble des couples position–vitesse  $(q_i, \dot{q}_i)$ .

Ici,  $T\mathcal{V}$  est l'ensemble des vitesses regroupe les dérivées temporelles des *ddl* :

$$T\mathcal{V} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N\}.$$

## Exemples

Colonne à mesurer :



Deux ascenseurs

Robot holomone avec roues Mecanum

Catapulte et son projectile







Tour EMCO E25

Robot Fanuc

## 2.3 Formulation du problème : Écrire les équations du mouvement

Les équations du mouvement servent à décrire et prédire l'évolution temporelle du système (ex : position, vitesse et accélération).

### 2.3.1 Préambule : cinématique du point

La cinématique est l'étude scientifique du mouvement indépendamment des causes qui le produisent. Elle se concentre sur la position, la vitesse et l'accélération des objets en fonction du temps.

#### Vecteur position et trajectoire

Le vecteur position du point  $M$  est le vecteur reliant  $O$  (l'origine du repère  $\mathcal{R}$ ) au point  $M$  :

$$\overrightarrow{OM} = f_1(t)\vec{e}_1 + f_2(t)\vec{e}_2 + f_3(t)\vec{e}_3$$

où  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  et  $f_3(t)$  sont trois fonctions du temps qui donnent les coordonnées du  $M$  dans  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  à chaque instant  $t$ . Notons que ces fonctions sont homogènes à des distances, c'est-à-dire que dans le système international d'unités, elles s'expriment en mètres  $[m]$ .

La trajectoire d'un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des positions successives occupées par le point  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lorsque le temps varie.

#### Référentiel

Un référentiel est un solide, lié à un observateur (réel ou imaginaire) par rapport auquel on définit la position et le mouvement.

D'un point de vue mathématique, il est défini par un repère,  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , comprenant une origine  $O$  et une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , soit trois axes indépendants. Nous choisirons une base **orthonormée** et **directe** pour des raisons de simplicité.

#### Vecteur vitesse

La variation de position de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  entre deux instants infinimentalement proches est caractérisée par le vecteur vitesse du point  $M$  par rapport au repère  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  défini par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}.$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{f}_1(t)\vec{e}_1 + \dot{f}_2(t)\vec{e}_2 + \dot{f}_3(t)\vec{e}_3$$





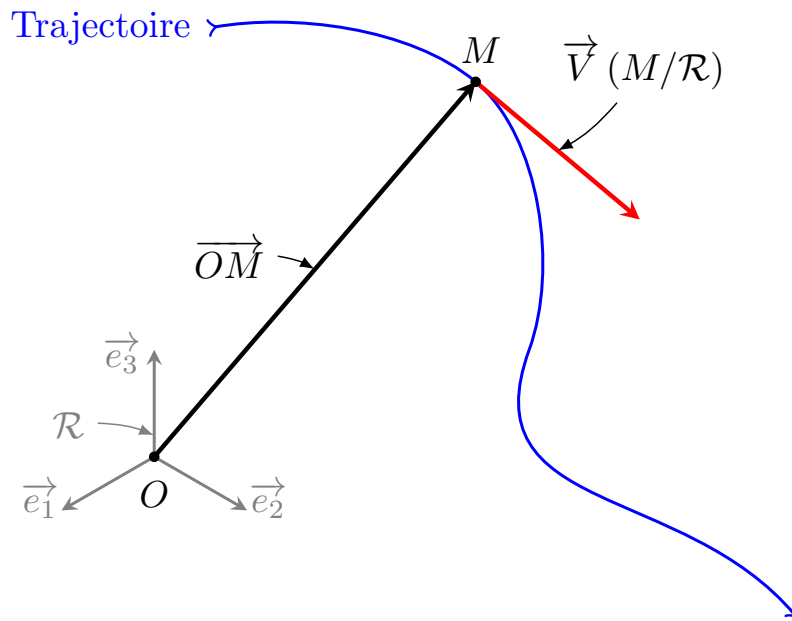


FIGURE 2.1 – Trajectoire du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

où  $\dot{f}_1(t)$  désigne la dérivée de  $f_1(t)$  par rapport au temps.

Notons que la dimension physique d'une vitesse est une longueur  $L$  sur un temps  $T$ . Dans le système international d'unités, la vitesse s'exprime en mètres par seconde  $[m.s^{-1}]$ .

**Propriété 2.1** Le vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  est tangent à la trajectoire de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .

**Propriété 2.2** Pour tous points  $A$  fixe dans le repère  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , on a

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{AM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}.$$

**Remarque 2.1** Calculer une vitesse par rapport à un repère  $\mathcal{R}$  ne signifie pas qu'il faille exprimer cette vitesse dans la base liée à ce repère.

### Vecteur accélération

L'accélération d'un point  $M$  par rapport au repère  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ , est la variation au cours du temps du vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ . Le vecteur accélération d'un point  $M$  par rapport au repère  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ , s'exprime donc à l'aide de la formule :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

La dimension physique d'une accélération est une longueur  $L$  sur le carré d'un temps  $T^2$ . Dans le système international d'unités, l'accélération s'exprime en mètres par seconde au carré  $[m.s^{-2}]$ .

### 2.3.2 Principe Fondamentale de la Dynamique

#### Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point  $M$  de masse  $m$ , dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , est :

$$\vec{p}(M/\mathcal{R}_g) = m \vec{V}(M/\mathcal{R}_g).$$

où  $\vec{V}(M/\mathcal{R}_g)$  la vitesse du point  $M$  par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ .

**Propriété 2.3** La quantité d'un ensemble de  $n$  point matériel  $S = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$  est la somme des quantités de mouvement de chaque point matériel

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_g)$$

#### Énoncé du PFD

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , pour un point matériel  $M$  de masse  $m$ , on a :

$$\left. \frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

où  $\vec{p}(M/\mathcal{R}_g)$  la quantité de mouvement du point  $M$  par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  et  $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum \vec{F}_{i \rightarrow M}$  la somme des forces s'exerçant sur  $M$ .

#### Remarque 2.2

— Si la masse  $m$  est constante, cela se simplifie que :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

— Pour les systèmes à masse variable, on conserve la forme générale.

— En l'absence de forces extérieures ( $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ ), le point matériel conserve sa vitesse (1<sup>ère</sup> loi de Newton).

#### Théorème des actions réciproques

La force d'un point matérielle  $M_1$  sur un point matérielle  $M_2$  est l'opposée de la force de  $M_2$  sur  $M_1$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}.$$

## Utilisation du PFD

Pour formuler un problème avec  $n$  points en dimension  $D$  à l'aide du PFD, on s'appuie sur la modélisation et schématisation du système. Puis, on applique l'algorithme suivant :

### 1. LISTER

- LISTER le nombre d'équation du mouvement :  $n_e = D n$
- LISTER les forces et les inconnues statique  $I_s$
- LISTER les coordonnées généralisées :  $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$  et inconnues cinématiques  $I_c$
- LISTER les inconnues du problème :  $I = I_c + I_s$

### 2. TESTER

La validité du modèle

- SI  $I = n_e$  le modèle est valide
- SINON revoir la modélisation du problème

### 3. FORMULER

- Appliquer le PFD sur chaque point du système

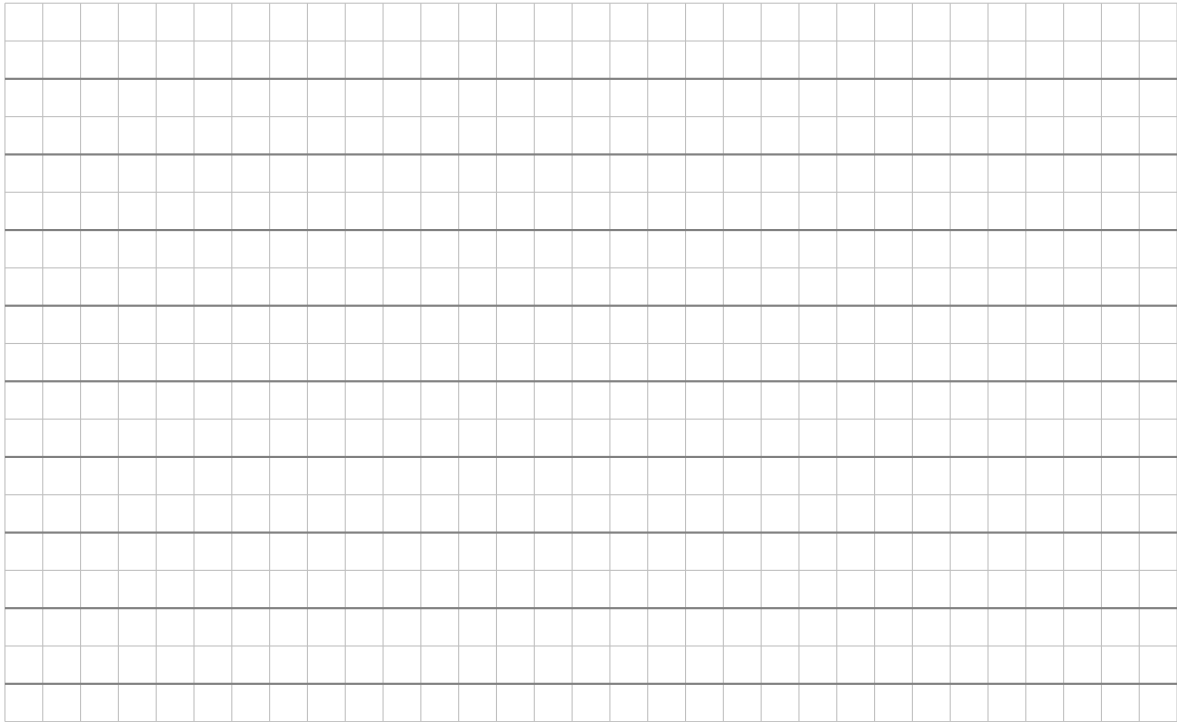
### 4. RÉSOUDRE

- Projeter les équations vectorielles dans une base

### 2.3.3 Exemples


#### Exemple 1 : Chute d'un corps ; Action de pesante



**Exemple 2 : Système masse ressort ; Action d'un ressort****Exemple 3 : Système masse ressort amortisseur ; Action d'un amortisseur**

2.3. FORMULATION DU PROBLÈME : ÉCRIRE LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT 27

**Exemple 4 : Catapulte**

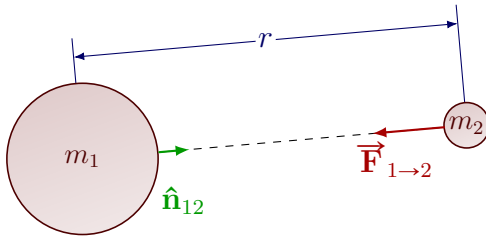
A large grid of graph paper with 20 columns and 20 rows, intended for writing the equations of motion for a catapult.

**Exemple 5 : Propulsion, système ouvert**

A large grid of graph paper with 20 columns and 20 rows, intended for writing the equations of motion for an open propulsion system.

### 2.3.4 Synthèse sur les actions mécaniques

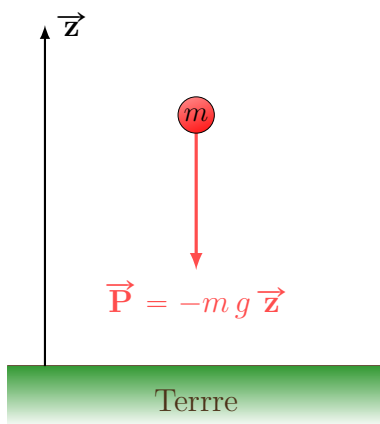
#### Action de la gravité



$$\vec{F}(1 \rightarrow 2) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{n}$$

où  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  est la constante gravitationnelle

#### Action de pesanteur



$$\vec{P}(\text{Terre} \rightarrow 1) = -m g \vec{z}$$

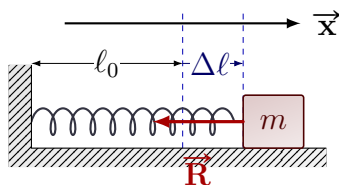
avec  $g \approx 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ .

**Remarque 2.3** L'action de pesanteur est l'approximation de l'action de gravité de la terre sur une masse  $m$  lorsqu'on est à la surface de la terre.

$$g = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

où  $m_T$  est la masse de la Terre et  $R_T$  sont rayon.

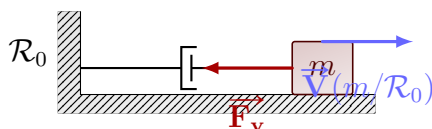
#### Action d'un ressort



$$\vec{R}(\text{ressort} \rightarrow 1) = -k(l - l_0) \vec{x}$$

où  $k > 0$  est la raideur du ressort.  
 $k$  a pour unité  $\text{N.m}^{-1}$ .

#### Action d'un amortisseur

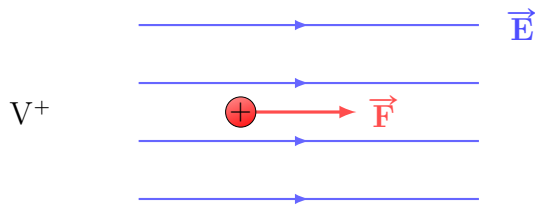


$$\vec{F}_v(\text{amortisseur} \rightarrow 1) = -c \vec{V}(m/\mathcal{R}_0)$$

où  $c > 0$  est le coefficient d'amortissement.  
 $c$  a pour unité  $\text{N.s.m}^{-1}$ .

## Action électromagnétique

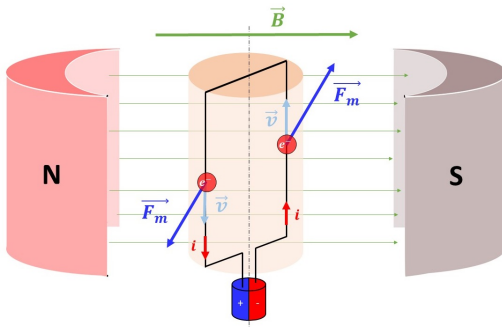
### Force de Coulomb



$$\vec{F}_e = -q \vec{E}$$

où  $q$  est la charge de la particule et  $\vec{E}$  est le champ électrique.

### Force magnétique



$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

où  $q$  est la charge de la particule,  
 $\vec{v}$  sa vitesse  
 $\vec{B}$  est le champ magnétique.

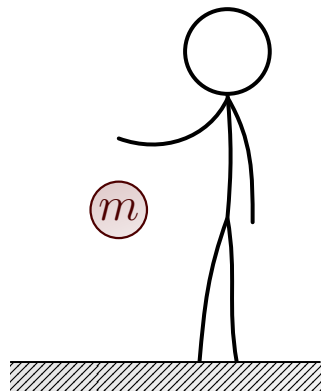
## 2.4 Résolution des équations du mouvement

Les équations du mouvement d'un point matériel s'écrivent sous la forme d'équations différentielles ordinaires (EDO) du second ordre. Pour déterminer une solution unique, il est nécessaire de spécifier deux conditions initiales :

- la position initiale :  $x(t = 0) = x_0$ ,
- la vitesse initiale :  $\dot{x}(t = 0) = v_0$ .

Dans la majorité des cas, ces systèmes d'EDO ne possèdent pas de solution analytique et doivent donc être résolus numériquement. Cependant, lorsque le système est **linéaire**, il est possible d'obtenir une solution analytique explicite. La maîtrise de ces cas particuliers est essentielle car ils constituent des modèles de référence, permettant de mieux comprendre et analyser les situations plus complexes rencontrées en pratique par l'ingénieur.

### 2.4.1 Balistique

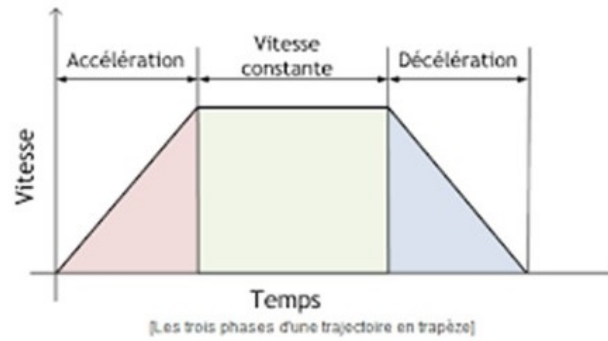
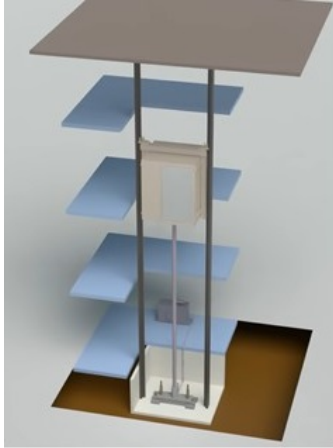
**Exemple 1 : Chute d'un corps**

**Exemple 2 : Trajectoire d'un projectile**



## 2.4.2 Calcul de la force d'un actionneur

### Exemple 3 : Calcul de la force d'un vérin



**2.4.3 Oscillateur : Système masse ressort amortisseur**

**Exemple 4 : Réponse libre**



**Exemple 5 : Réponse forcée de type choc**

**Exemple 6 : Réponse forcée harmonique**



## 2.5 Analyse

Trajectoire d'un projectile

Exemple



## Énergie

L'énergie n'est pas seulement une grandeur calculatoire : elle constitue une quantité universelle qui se conserve dans un système isolé et qui peut se transférer d'une forme à une autre (énergie cinétique, potentielle, thermique, chimique, etc.).

L'unité de mesure de l'énergie dans le Système international (SI) est le **joule (J)**, défini par :

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

L'énergie mécanique totale d'un système est la somme de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie potentielle  $V$ .

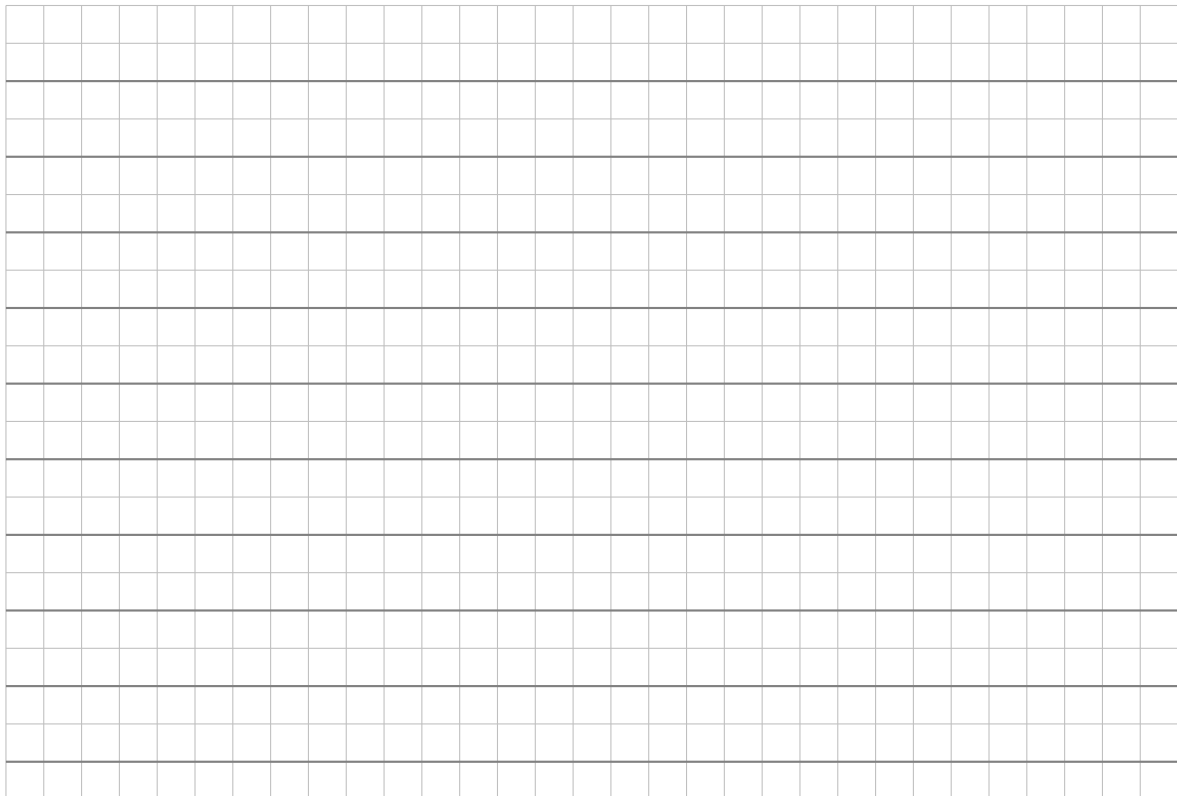
$$E = T + V,$$

### Énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique d'un ensemble  $S = \{M_i\}$  de points matériels de masse  $\{m_i\}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par :

$$T(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left\| \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}) \right\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}).$$

### Exemple : Tour de chute



## Énergie potentielle

L'énergie potentielle est une grandeur associée à la position d'un système dans un champ de forces. Elle traduit la capacité de ce système à produire du travail sous l'action de forces conservatives.

### Exemples classiques

- Poids (champ de pesanteur uniforme) :

$$\vec{F} = -mg \vec{z}, \quad V(z) = mgz + C.$$

- Ressort (loi de Hooke) :

$$\vec{F} = -k(x - l_0) \vec{x}, \quad V(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + C.$$

- Interaction gravitationnelle newtonienne :

$$\vec{F}_{m_1 \rightarrow m_2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{n}, \quad V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + C.$$

## Saut à l'élastique







## SYSTÈMES DISSIPATIFS

Contrairement à un système conservatif où l'énergie totale se conserve, un système dissipatif dissipe une partie de son énergie au cours du temps. Autrement dit, un système dissipatif est un système physique ou mécanique dont l'évolution entraîne une perte d'énergie mécanique sous forme de chaleur, de frottements, de bruit ou de toute autre forme non réversible.

Les systèmes dissipatifs sont indispensables pour représenter la réalité des systèmes physiques à notre échelle. Leur modélisation permet d'intégrer les phénomènes d'amortissement, et donc de mieux prévoir et contrôler la réponse et la stabilité des systèmes étudiés en ingénierie.

### 3.1 Puissance

#### Définition

La **puissance mécanique instantanée** est définie comme la quantité d'énergie transférée ou transformée par unité de temps. Donc l'unité de la puissance est :

$$[P] = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W} \quad (\text{Le Watt}).$$

Dans le cas d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point matériel de vitesse  $\vec{v}$ , la puissance instantanée s'écrit :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Ainsi, la puissance traduit la *rapidité avec laquelle une force fournit ou absorbe de l'énergie*.

Considérons un système mécanique constitué de  $n$  points matériels, de masses  $m_i$ , soumis à des forces  $\vec{F}_{\rightarrow i}$  et possédant des vitesses  $\vec{V}(M_i/\mathcal{R})$ .

La **puissance mécanique instantanée totale** du système est donnée par la somme des puissances élémentaires de chaque point :

$$P = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\rightarrow i} \cdot \vec{V}(M_i/\mathcal{R}).$$

Ainsi, la puissance totale est l'addition des contributions de chaque force sur chaque point matériel.

## Bilan de puissance

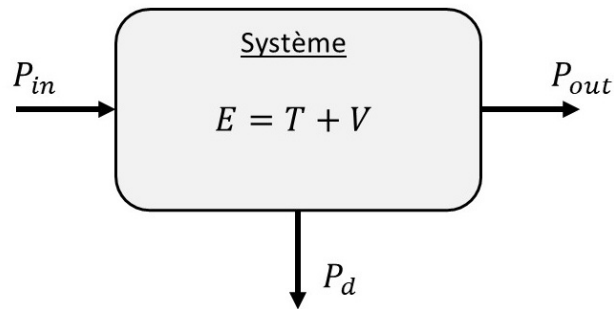


FIGURE 3.1 – Bilan de puissance d'un système mécanique

La figure 3.1 représente le bilan de puissance d'un **système mécanique dissipatif** d'énergie totale :  $E = T + V$ , qui peut s'écrire :

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{out} - P_d.$$

Cette équation exprime que la variation de l'énergie interne du système ( $\frac{dE}{dt}$ ) est due à :

- la puissance fournie au système ( $P_{in}$ ),
- la puissance utile transmise en sortie ( $P_{out}$ ),
- la puissance dissipée sous forme de pertes ( $P_d$ ).

## Rendement instantané

Le **rendement instantané**, noté  $\eta(t)$ , est un indicateur de la qualité de la transmission ou de la conversion d'énergie dans un système mécanique ou énergétique. Il se définit comme le rapport entre la puissance utile délivrée en sortie et la puissance fournie en entrée :

$$\eta(t) = \frac{P_{out}(t)}{P_{in}(t)},$$

avec  $0 \leq \eta(t) \leq 1$ .

## Que devient l'énergie dissipée

L'énergie dissipée entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  est, par définition :

$$E_d = \int_{t_0}^{t_1} P_d dt$$

Cette énergie n'est pas détruite, mais elle est généralement **transformée en chaleur** en raison de phénomènes irréversibles tels que :

- les frottements secs (contact solide–solide),

— les frottements visqueux (contact solide–fluide),

ce qui entraîne une élévation de température de certaines parties du système ou de son environnement.

Il convient également de noter qu'une partie de cette énergie peut être dissipée sous forme d'ondes acoustiques ou d'ondes de choc dans le milieu extérieur.

## Lien avec la thermodynamique

Le bilan de puissance d'un système :

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{out} - P_d.$$

est une forme simplifiée du **premier principe de thermodynamique**, qui s'écrit sous la forme générale :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}.$$

où :

- $E$  est l'énergie totale interne du système (mécanique + thermique + chimique...),
- $\dot{Q}$  est la puissance thermique échangée avec l'extérieur,
- $\dot{W}$  est la puissance mécanique échangée (travail des forces extérieures).

Ce principe exprime que l'énergie ne peut ni être créée, ni détruite : elle se transforme ou se transfère.

Le plus souvent dans un système mécanique, la puissance mécanique échangée est  $\dot{W} = P_{in} - P_{out}$  et la puissance thermique échangée avec le milieu (ou production de chaleur instantanée) se fait via les phénomènes dissipatifs  $\dot{Q} = -P_d$ .

De plus, la puissance dissipée induit toujours une augmentation de l'énergie du milieu extérieur au système :

$$P_d \geq 0,$$

ce qui illustre le caractère irréversible des processus dissipatifs, en accord avec le **deuxième principe de la thermodynamique**.

## 3.2 Théorème de l'énergie cinétique

### Énoncé général

Considérons un système mécanique formé de  $n$  points matériels  $M_i$  de masses  $m_i$ , soumis à des forces qui peuvent être de trois types :

- des **forces conservatives** (associées à une énergie potentielle),
- des **forces dissipatives** (frottements secs, frottement visqueux),
- des **forces extérieures non conservatives**.

Le **théorème de l'énergie cinétique** énonce que la dérivée temporelle de l'énergie cinétique totale du système est égale à la puissance instantanée des forces appliquées au système :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{F}}_{\rightarrow i} \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}),$$

où  $T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R})$  l'énergie cinétique totale, et  $\vec{\mathbf{F}}_{\rightarrow i}$  désigne la force résultante appliquée au point  $M_i$ .

### Démonstration dans le cas d'une particule

Considérons une particule de masse  $m$  soumise à une force  $\vec{\mathbf{F}}$ . D'après le PFD :

$$m \vec{\mathbf{a}}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathbf{F}},$$

où  $\vec{\mathbf{a}} = \left. \frac{d\vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g}$  est l'accélération du point  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen. On calcule la puissance développée par la force :

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g) = m \left. \frac{d\vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g).$$

Or, on reconnaît la dérivée de l'énergie cinétique :

$$m \left. \frac{d\vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g) \right).$$

Ainsi :

$$\frac{dT(M/\mathcal{R}_g)}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}_g).$$

**C.Q.F.D.**

### 3.3 Frottement visqueux

Le **frottement visqueux** correspond à la résistance rencontrée par un solide en mouvement dans un fluide (air, eau, huile) ou par deux pièces en mouvement relatif séparées par un film fluide lubrifiant.

#### Force visqueuse

La force visqueuse exercée par un fluide sur une particule  $M$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R}_f)$  par rapport à  $\mathcal{R}_f$ , le référentiel associé au centre de masse au fluide, est :

$$\vec{F}_v = -c \vec{V}(M/\mathcal{R}_f)$$

où  $c > 0$  est le coefficient de frottement visqueux qui a pour unité  $[\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}] = [\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]$ .

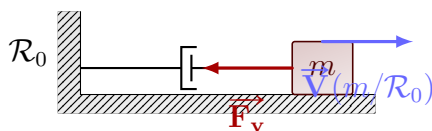
#### Puissance dissipée

La puissance dissipée correspondante est :

$$P_d = -\vec{F}_v \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_f) = c \vec{V}(M/\mathcal{R}_f) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_f) = c \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_f)\|^2 \geq 0$$

#### Modélisation par amortisseur visqueux

Dans la pratique, le frottement visqueux est souvent représenté par un **amortisseur visqueux** (ou dashpot), constitué d'un piston se déplaçant dans un fluide visqueux.



$$\vec{F}_{v \rightarrow 1} = -c \vec{V}(m/\mathcal{R}_0) = -c \dot{x} \vec{x}$$

où  $c > 0$  est le coefficient d'amortissement.  
 $c$  a pour unité  $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### 3.4 Frottement sec

Le **frottement sec** apparaît lorsqu'un solide glisse ou tente de glisser sur la surface d'un autre solide. C'est un phénomène dissipatif qui transforme l'énergie mécanique en chaleur.

#### Force de frottement

La force de frottement sec  $\vec{F}_f$  est une force qui s'oppose à la vitesse glissement  $\vec{V}(M/S)$  d'un point  $M$  par un solide  $S$ .

$$\vec{F}_f \cdot \vec{V}(M/S) \leq 0$$

#### Puissance dissipée

Si une force de frottement  $\vec{F}_f$  agit sur un point matériel animé d'une vitesse  $\vec{V}(M/S)$  en contact avec un solide  $S$ , la puissance dissipée est donnée par :

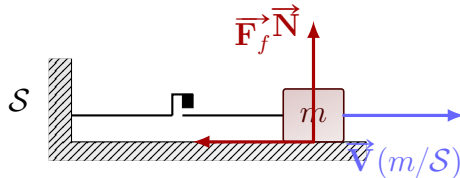
$$P_d = -\vec{F}_f \cdot \vec{V}(M/S).$$

Le signe négatif traduit le fait que le frottement s'oppose toujours au mouvement, ce qui implique :

$$P_d \geq 0.$$

### Modélisation par patin-frottement

Une modélisation classique du frottement sec consiste à représenter le contact par un **patin en frottement**.



$$\text{Si } \vec{V}(m/S) = \vec{0} \text{ alors } \|\vec{F}_f\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

$$\text{Si } \vec{V}(m/S) \neq \vec{0} \text{ alors } \|\vec{F}_f\| = \mu_d \|\vec{N}\|$$

### Lois de Coulomb

Les lois de Coulomb permettent de modéliser le frottement sec de manière simplifiée.

1. **Au repos (adhérence)** : Tant que le solide ne glisse pas ( $\vec{V}(M/S) = \vec{0}$ ), la force de frottement s'ajuste à la force appliquée pour empêcher le mouvement, dans la limite :

$$\|\vec{F}_f\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|,$$

où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique et  $\vec{N}$  l'effort normal au contact.

2. **En mouvement (glissement)** : Lorsqu'il y a glissement ( $\vec{V}(M/S) \neq \vec{0}$ ), la force de frottement est proportionnelle à la force normale au contact et dirigée à l'opposé de la vitesse relative :

$$\vec{F}_f = -\mu_d \|\vec{N}\| \frac{\vec{V}(M/S)}{\|\vec{V}(M/S)\|},$$

où  $\mu_d$  est le coefficient de frottement dynamique (avec  $\mu_d \leq \mu_s$ ).

## 3.5 Exemples

**Exemple 1 : Chute d'un corps**



**Exemple 2 : Trajectoire d'une balle**

**Exemple 3 : Système masse amortisseur ressort**



**Exemple 4 : Masse sur un plan incliné**

**Exemple 5 : Frein d'ascenseur**





## SYSTÈMES CONTRAINTS

Un système contraint est un point matériel (ou un ensemble de points) dont le mouvement n'est pas totalement libre dans l'espace, mais soumis à des conditions géométriques imposées par l'environnement.

Il existe 2 type de contraintes :

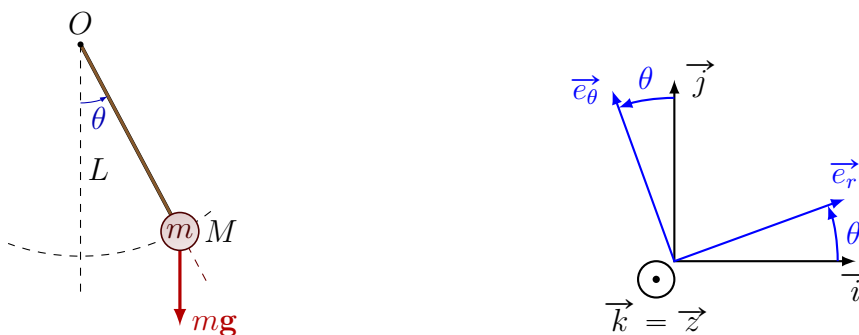
**Holonomes** : s'expriment par des relations géométriques entre coordonnées.

**Non holonomes** : contraintes qui portent sur les vitesses (ex. roulement sans glissement).

L'étude des contraintes est indispensable car :

1. Elle reflète la réalité (aucun système n'est totalement libre).
2. Elle permet de simplifier et modéliser correctement les problèmes.
3. Elle fournit le lien direct entre mécanique du point et mécanique du solide.

### 4.1 Pendule simple



Le pendule simple est en apparence un exemple simple, mais riche en concepts très utiles en sciences et en ingénierie :

- Modélisation : prise en compte de contraintes, paramétrages conformes
- Formalisation : méthode énergétique
- Résolution : équation différentielles non-linéaires, linéarisation, méthodes numériques
- Analyse et optimisation : mesure de  $g$ , mesure de la vitesse rotation de la terre, horlogerie, sismographe, robotique, ...

Le pendule simple est un système mécanique constitué :

- d'un point matériel  $M$  (masse ponctuelle  $m$ )
- suspendu à une tige ou un fil inextensible et de masse négligeable, fixé au point  $O$ , de longueur  $L = \|\overrightarrow{OM}\|$
- soumis à la gravité

### Modélisation

On fait les hypothèses suivantes :

- le problème est en 2D  $\overrightarrow{OM} = x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}} = r \vec{\mathbf{e}}_r$
- l'accélération de pesanteur uniforme est  $\vec{\mathbf{g}} = +g \vec{\mathbf{i}}$
- le référentiel  $\mathcal{R}(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$  est supposé galiléen
- l'angle entre les vecteurs  $\vec{\mathbf{i}}$  et  $\vec{\mathbf{e}}_r$  est  $\theta$

L'espace des configurations :

$$Q = \{x, y\}$$

L'espace des états :

$$\mathcal{T}_Q = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$$

La contrainte est :

$$r - L = \sqrt{x^2 + y^2} - L = 0$$

La vitesse et accélération de  $M$  par rapport au référentiel galiléen sont

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}) &= \dot{x} \vec{\mathbf{i}} + \dot{y} \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{a}}(M/\mathcal{R}) &= \ddot{x} \vec{\mathbf{i}} + \ddot{y} \vec{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

qui peuvent s'exprimer en coordonnées polaire  $(r, \theta)$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{V}}(M/\mathcal{R}) &= \dot{r} \vec{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \vec{\mathbf{e}}_\theta \\ \vec{\mathbf{a}}(M/\mathcal{R}) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{\mathbf{e}}_\theta\end{aligned}$$

#### 4.1.1 Stratégie 1 : Méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation consiste à remplacer la contrainte par ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L$ .



### 4.1.2 Stratégie 2 : Ajout d'une inconnue de force

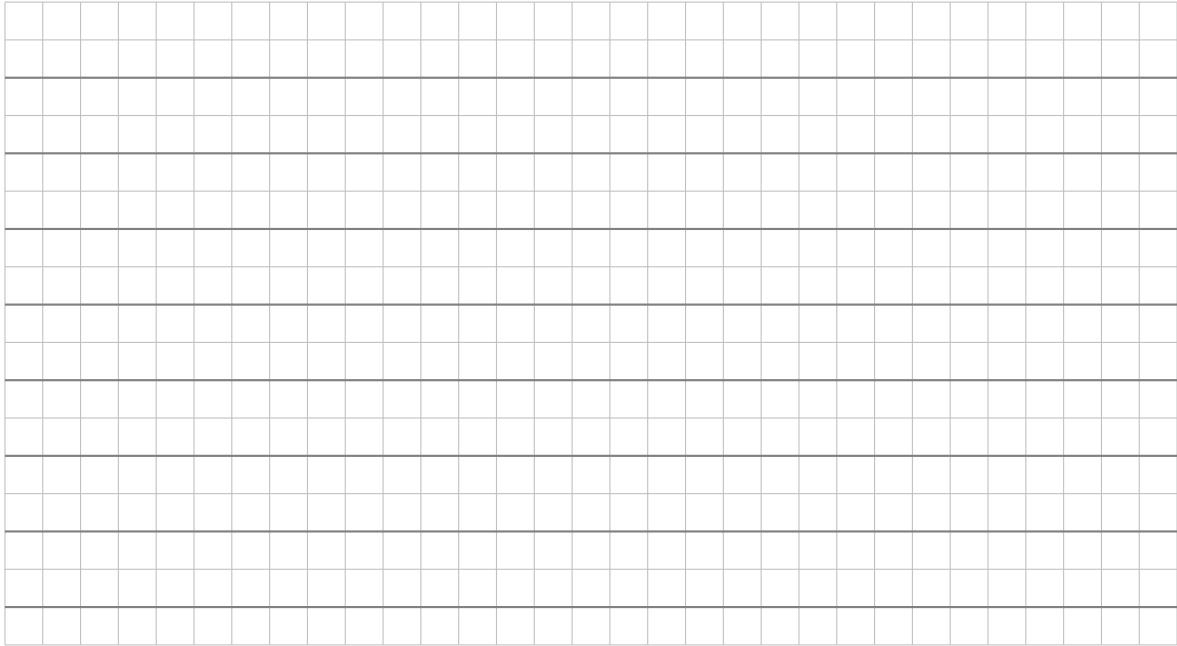
La seconde stratégie est d'imposer la contrainte en utilisant un paramétrage bien choisi et d'ajouter une force  $\vec{T}$  inconnue.



### 4.1.3 Résolution

Dans cette partie, nous présentons deux méthodes pour résoudre les équations du mouvement.

#### Résolution analytique : Linéarisation



#### Résolution numérique

##### Transformation de l'équation



**Schéma d'Euler explicite**

#### 4.1.4 Comparaison des deux méthodes

	Méthode de pénalisation	Méthode d'ajout de forces
<b>Principe</b>	On remplace la contrainte par un ressort de raideur $k$	On introduit des forces de liaison indéterminées associées à chaque contrainte
<b>Respect des contraintes</b>	Approximative dépendant de la raideur de pénalisation $k$	Exact
<b>Conditions sur les contrainte</b>	Aucunes	Le système doit être correctement contraint (isostatique)
<b>Paramétrage conforme</b>	Non nécessaire	Fortement recommandé
<b>Intégration numérique</b>	Problématique : grandes raideurs $k$ nécessitent un petits pas de temps $\Delta t$ très petit pour la stabilité	Mieux conditionnée numériquement
<b>Complexité de mise en œuvre</b>	Simple à coder, mais délicat à régler (choix de $k$ )	Plus lourd à coder, mais méthode rigoureuse et robuste

## 4.2 Notion d'hyperstatisme

### Définition générale

Un *système de points matériels soumis à des contraintes* est caractérisé par :

- ses **degrés de liberté cinématiques**  $N_{ddl}$  (nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour décrire la configuration),
- le **nombre de contraintes**  $N_c$  imposées (conditions géométriques entre les coordonnées).

### Système isostatique

Lorsque le nombre de contraintes est exactement celui qui permet de fixer les mouvements parasites et de réduire les degrés de liberté à la valeur attendue, le système est dit **isostatique**.

$$N_c = N_g,$$

où  $N_c$  est le nombre de conditions de contrainte et  $N_g$  le nombre de conditions nécessaires pour réduire correctement les degrés de liberté.

Il s'obtient à partir du nombre d'équation disponible  $N_e$  et du nombre de degrés de liberté du système  $N_{ddl}$

$$N_g = N_e - N_{ddl} = nD - N_{ddl}$$

où  $n$  est le nombre de particules et  $D$  la dimension du problème.

## Systèmes hyperstatiques

On dit qu'un système est **hyperstatique** si le nombre de contraintes imposées est *supérieur* à celui strictement nécessaire pour définir les degrés de liberté. Autrement dit, certaines contraintes deviennent *redondantes* :

$$N_c > N_g,$$

On appelle degrés d'hyperstatisme  $h$

$$h = N_c - N_g$$

## 4.3 Paramétrages conformes dans un système de points matériels

### Définition

Un paramétrage est dit **conforme** lorsque :

- Les variables  $q_i$  décrivent toutes les configurations possibles du système sous contraintes, *sans contradiction*.
- Les équations de contrainte sont automatiquement satisfaites par la définition même des coordonnées généralisées.
- Chaque déplacement virtuel  $\delta q_i$  correspond exactement à un déplacement virtuel admissible du système (c'est-à-dire compatible avec les contraintes).

En d'autres termes, un paramétrage conforme garantit que l'on travaille directement dans l'« espace des contraintes », sans avoir besoin d'introduire explicitement les forces de liaison dans l'analyse dynamique.

### Intérêt du paramétrage conforme

- **Réduction de la complexité** : au lieu de gérer  $3N$  coordonnées et  $k$  contraintes, on travaille avec seulement  $n = 3N - k$  coordonnées indépendantes.
- **Élimination des réactions**

**Exemples 2D**



**Exemples 3D**

## 4.4 Principe des puissances virtuelles

### 4.4.1 Énoncé du principe

Le **principe des puissances virtuelles** affirme que, pour tout champs de vitesse virtuel,

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_{\rightarrow i} \cdot \delta \vec{\mathbf{V}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{a}}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \delta \vec{\mathbf{V}}_i.$$

Autrement dit, la *puissance virtuelle des forces extérieures* est égale à la *puissance virtuelle des forces d'inertie*.

### 4.4.2 Intérêt pour un système contraint

Lorsqu'on utilise un champs de vitesses virtuelles  $\delta \vec{\mathbf{V}}_i$  compatibles avec les forces  $\vec{\mathbf{R}}_i$  associées aux contraintes, en utilisant un paramétrage conforme, les réactions de liaison ne font pas de travail virtuel :

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{R}}_i \cdot \delta \vec{\mathbf{V}}_i = 0.$$

Ainsi, elles n'apparaissent pas explicitement dans le principe, ce qui simplifie grandement l'écriture des équations du mouvement.

### Formulation dans le système de coordonnées conforme

Si l'on introduit un **paramétrage conforme**  $(q_1, \dots, q_n)$  décrivant la configuration, les déplacements virtuels s'écrivent :

$$\delta \vec{\mathbf{V}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{\mathbf{V}}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

En reportant dans le principe, on obtient :

$$\sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j, \quad Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{F}}_{\rightarrow i} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{V}}_i}{\partial q_j}$$

où  $T$  est l'énergie cinétique du système et  $Q_j$  les *forces généralisées*.

Comme les  $\dot{q}_j$  sont indépendants, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

## 4.5 Exemples

**Bille sur railles**



## Haltère



**Double pendule**

Deuxième partie  
Dynamique du solide



## CINÉMATIQUE DU SOLIDE - ESPACE DES ÉTATS D'UN SOLIDE INDÉFORMABLE

Dans le cas d'un solide indéformable, les distances entre tous les points du solide restent constantes au cours du temps. Cette contrainte géométrique réduit considérablement la complexité du problème. Ainsi, le mouvement d'un solide indéformable peut être décrit entièrement à partir de :

- la position d'un point de référence définie par **3 coordonnées de translation**,
- l'orientation du solide dans l'espace, décrite par **3 coordonnées de rotation**.

Cette réduction fondamentale — de l'infinité de points à seulement six paramètres indépendants — est à la base de toute la **cinématique du solide**.

### 5.1 Repère local

Comme en CAO, pour définir la position de tous les points d'un solide  $S_i$ , on lui associe un repère locale (ou repère pièce)

$$\mathcal{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$$

où  $O_i$  est l'origine du repère et  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  constitue une base orthonormée directe.

Ainsi, à chaque instant, la position d'un point  $M \in S_i$  est donnée par :

$$\left[ \overline{O_i M} \right]_{B_1} = X_M \vec{x}_i + Y_M \vec{y}_i + Z_M \vec{z}_i = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix}_{B_1}$$

où  $(X_M, Y_M, Z_M)$  sont les coordonnées de  $M$  dans le repère local. Puisque le solide est indéformable, ces coordonnées restent constantes : elles ne changent pas au cours du temps.

Toute la problématique de la **cinématique du solide** consiste alors à décrire le mouvement du repère locale  $\mathcal{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  au cours du temps par rapport à repère global choisi  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

**Remarque 5.1** *Le repère local n'est pas unique. Dans la pratique, on le choisit de manière à simplifier la modélisation et les calculs, par exemple en plaçant son origine au centre de gravité ou sur un axe de symétrie du solide.*

## 5.2 Espace de configuration

Pour définir la position du repère pièce  $\mathcal{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  par rapport au repère global  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , il faut définir :

- la position de l'origine  $\overrightarrow{O_0O_i}$  (3 ddl de translation)

$$\overrightarrow{O_0O_i} = \vec{p}_i$$

- l'orientation de la base  $\mathcal{B}_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  par rapport à la base globale  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  (3 ddl de rotation)

En effet, dans la position de n'importe quel point  $M \in S_i$  est entièrement définie dans le repère absolue  $\mathcal{R}$ , par la relation :

$$\overrightarrow{O_0M} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \vec{p}_i \Big|_{\mathcal{B}_0} + \mathbf{R}_{i/0} \cdot \overrightarrow{O_iM} \Big|_{\mathcal{B}_i}$$

où la matrice  $\mathbf{R}_{i/0}$  représente la **rotation de la base local**  $\mathcal{B}_i$  par rapport à la base fixe  $\mathcal{B}_0$ .

### Matrice de rotation

La nouveauté par rapport à la cinématique du point est la définition de l'orientation d'une base par rapport à une autre. L'outil mathématique dédié à ce problème est la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{i/0}$  vérifiant :

$$\mathbf{R}_{i/0} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 & \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 & \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0 & \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_0 & \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

### Propriétés

**Conserve** : angles, longueurs et orientation.

**Inverse** :

$$\mathbf{R}_{0/i} = \mathbf{R}_{i/0}^{-1} = \mathbf{R}_{i/0}^T$$

**Composition** :

$$\mathbf{R}_{2/0} = \mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0}$$

**Non-commutative** :

$$\mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0} \neq \mathbf{R}_{1/0} \cdot \mathbf{R}_{2/1}$$

### Utilisation de la matrice de rotation

- Définir l'orientation de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$
- Changer la base d'un vecteur  $\vec{U}$

$$\vec{U} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{R}_{1/0} \cdot \vec{U} \Big|_{\mathcal{B}_1}$$

- Changer la base d'une matrice  $A$

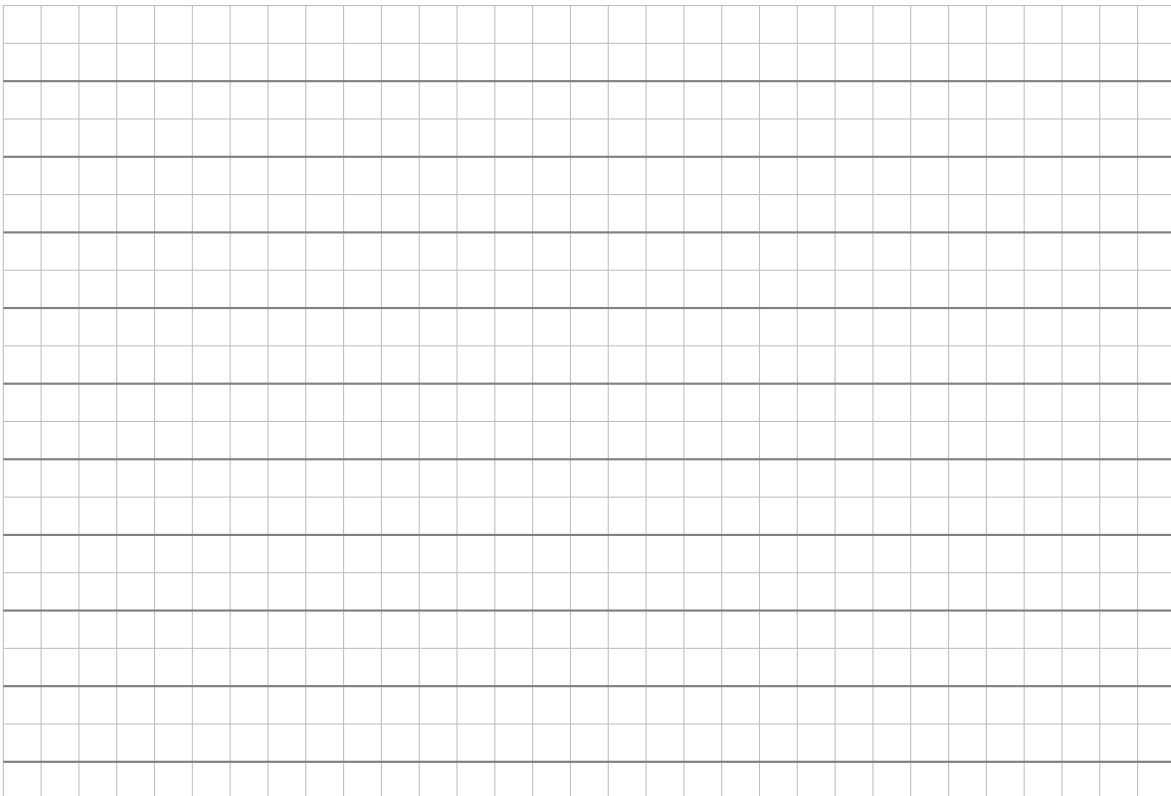
$$A \Big|_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{R}_{1/0} \cdot A \Big|_{\mathcal{B}_1} \cdot \mathbf{R}_{1/0}$$

— Trouver la position d'un point  $M$  après une rotation d'axe  $(O, \vec{k})$  d'angle  $\theta$

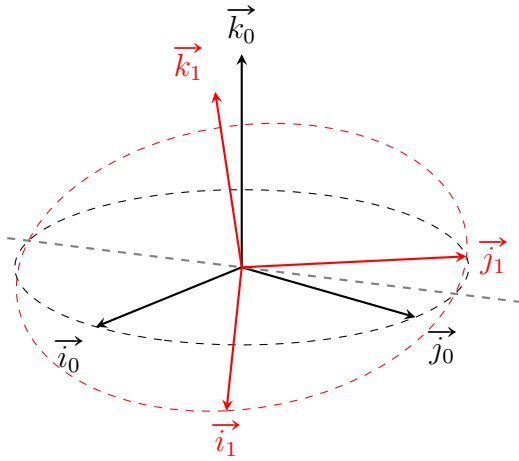
$$\overrightarrow{OM'} = \mathbf{R}_{\vec{k}}(\theta) \cdot \overrightarrow{OM}$$

où  $\mathbf{R}_{\vec{k}}(\theta)$  est la matrice de la rotation d'axe d'angle  $\theta$

### Exemple 1 : Matrice de rotation élémentaires

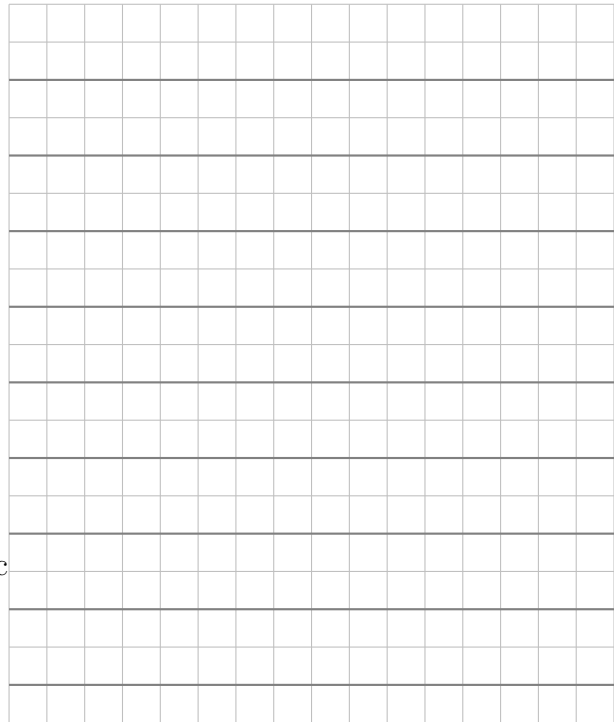


**Exemple 2 : Angles d'Euler**  $\mathbf{R}(1/0) = \mathbf{R}_Z(\phi) \mathbf{R}_Y(\theta) \mathbf{R}_Z(\psi)$



avec

- $\psi$  angle de précession
- $\theta$  angle de nutation
- $\phi$  angle de rotation propre ou spin



### Matrice de transformation $\mathbf{T}(1/0)$

Pour pouvoir utiliser le produit matricielle pour décrire le mouvement d'un solide rigide, on introduit les coordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

et la matrice de transformation

$$\mathbf{T}_{1/0} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1/0} & \vec{p}|_{\mathcal{R}_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & p_X \\ \mathbf{R}_{1/0} & p_Y \\ & p_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Propriétés :

- Conserve les angles, les longueurs et l'orientation
- Inverse :

$$\mathbf{T}_{0/1} = \mathbf{T}_{1/0}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1/0}^T & -\mathbf{R}_{1/0}^T \cdot \vec{p}|_{\mathcal{R}_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Composition :  $\mathbf{T}_{2/0} = \mathbf{T}_{2/1} \cdot \mathbf{T}_{1/0}$
- Non-commutative :  $\mathbf{T}_{2/1} \cdot \mathbf{T}_{1/0} \neq \mathbf{T}_{1/0} \cdot \mathbf{T}_{2/1}$

## Différents choix possibles pour l'espace de configuration

L'espace de configuration d'un solide  $S_i$  dans l'espace peut être défini de plusieurs manières équivalentes, selon le type de paramétrage choisi pour décrire sa position et son orientation.

- Paramétrage par translation et angles d'Euler :

$$\mathcal{Q} = \{p_X, p_Y, p_Z, \psi, \theta, \varphi\}$$

où  $(p_X, p_Y, p_Z)$  représentent les coordonnées de l'origine du repère lié au solide  $S_i$ , et  $(\psi, \theta, \varphi)$  sont les trois angles d'Euler définissant son orientation.

- Paramétrage par translation et matrice de rotation :

$$\mathcal{Q} = \{p_X, p_Y, p_Z, \mathbf{R}_{i/0}\}$$

où  $R_{i/0}$  est la matrice de rotation exprimant l'orientation du repère local  $\mathcal{R}_i$  par rapport au repère de référence  $\mathcal{R}_0$ .

- Paramétrage par matrice de transformation homogène :

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{T}_{i/0}\}$$

avec  $\mathbf{T}_{i/0}$  la **matrice de transformation homogène** regroupant à la fois la translation et la rotation :

$$\mathbf{T}_{i/0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i/0} & \vec{\mathbf{P}}_{i/0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Remarque 5.2** Le choix du paramétrage de l'espace de configuration dépend du contexte et vise avant tout à **simplifier les calculs**.

- Dans les modèles analytiques ou théoriques, le paramétrage par **angles d'Euler** est souvent utilisé car il relie directement la géométrie à la cinématique.
- Dans les simulations numériques, les logiciels de **CAO**, de **robotique** ou d'**animation 3D**, on privilégie généralement la **matrice de transformation homogène**  $\mathbf{T}_{i/0}$ , plus adaptée aux opérations matricielles (composition de mouvements, transformations hiérarchiques, etc.).

Enfin, le choix du paramétrage doit être **conforme aux contraintes géométriques** imposées par les liaisons entre pièces : il doit refléter fidèlement les degrés de liberté effectivement permis par le mécanisme étudié.

### 5.3 Espace des états d'un solide

L'espace des états  $TQ$  contient toute l'information nécessaire pour décrire le mouvement instantané d'un solide.

- Paramétrage à partir des coordonnées généralisées :

$$TQ = \{p_X, p_Y, p_Z, \psi, \theta, \varphi, \dot{p}_X, \dot{p}_Y, \dot{p}_Z, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\}$$

où  $(p_X, p_Y, p_Z)$  représentent les coordonnées de l'origine du repère lié au solide  $S_i$ , et  $(\psi, \theta, \varphi)$  sont les trois angles d'Euler définissant son orientation.

- Paramétrage par translation et matrice de rotation :

$$TQ = \{\overline{OO}_i, \mathbf{R}_{i/0}, \vec{V}(O_i/0), \vec{\Omega}(i/0)\}$$

où :

- $\overline{OO}_i$  est le vecteur position de l'origine du repère lié au solide  $S_i$ ,
- $\mathbf{R}_{i/0}$  est la matrice de rotation du repère du solide  $S_i$ ,
- $\vec{V}(O_i/0)$  la vitesse de son origine  $O_i$  par rapport au repère globale  $S_0$ ,
- $\vec{\Omega}(i/0)$  le vecteur rotation instantanée du solide  $S_i$  par rapport au repère globale.

- Paramétrage compact par matrice de transformation homogène et twist :

$$TQ = \{\mathbf{T}_{i/0}, \mathcal{V}_{i/0}\}$$

avec  $\mathbf{T}_{i/0}$  la **matrice de transformation homogène** regroupant à la fois la translation et la rotation :

$$\mathbf{T}_{i/0} = \begin{bmatrix} & & p_X \\ & \mathbf{R}_{i/0} & p_Y \\ & & p_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}_{i/0} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y & V_X \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & V_Y \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & V_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où :

- $p_X, p_Y, p_Z$  sont les coordonnées du vecteur position  $\overline{OO}_i$  dans le repère global,
- $\mathbf{R}_{i/0}$  est la matrice de rotation du repère du solide  $S_i$ ,
- $\mathcal{V}_{i/0}$  est la matrice de twist,
- $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  sont les coordonnées du vecteur taux de rotation instantanée  $\vec{\Omega}(i/0)$  dans le repère globale,
- $V_X, V_Y, V_Z$  sont les coordonnées du vecteur vitesse de  $O_i$  par rapport au repère globale  $S_0$   $\vec{V}(O_i/0)$ ,

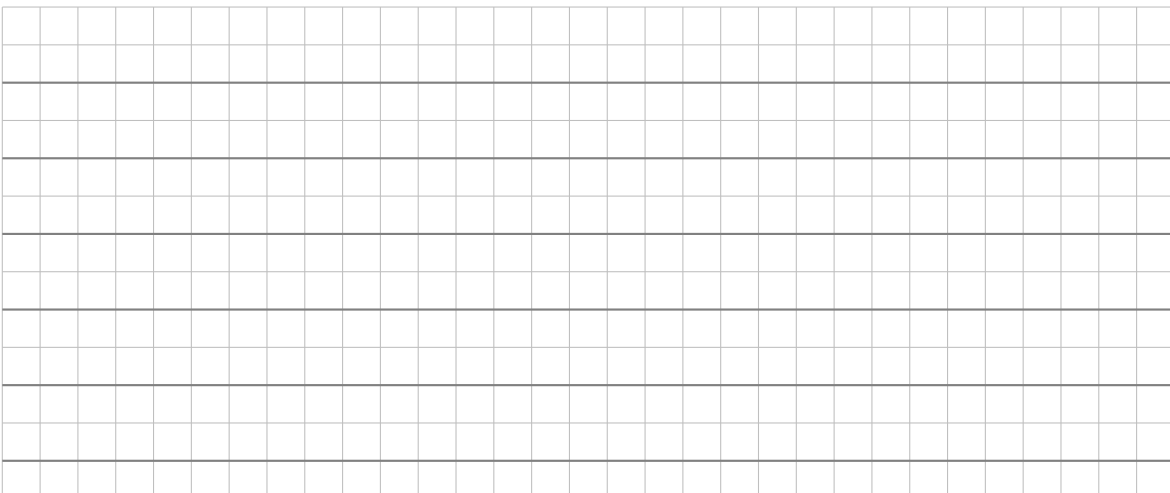
## 5.4 Vecteur taux de rotation

Le vecteur de taux de rotation  $\vec{\Omega}(i/0)$ , aussi appelé vecteur de vitesse angulaire, est une notion centrale en cinématique du solide. Il permet de décrire de façon simple et intuitive la manière dont un solide change d'orientation au cours du temps. Ce vecteur indique à la fois l'axe instantané autour duquel le solide tourne et la vitesse à laquelle cette rotation s'effectue. Sa direction correspond à celle de l'axe de rotation, son sens suit la règle du tire-bouchon, et sa norme représente la vitesse angulaire, exprimée en radians par seconde.

### Exemple 3 : Matrice de rotation élémentaires

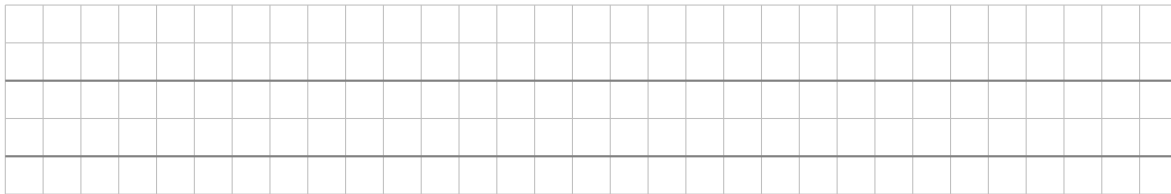
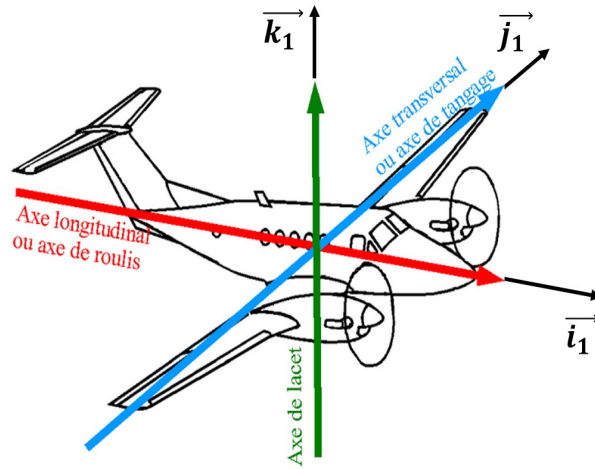


### Exemple 4 : Angles d'Euler $\mathbf{R}(1/0) = \mathbf{R}_Z(\phi) \mathbf{R}_Y(\theta) \mathbf{R}_Z(\psi)$



**Exemple 5 : Angles de Cardan**

- Lacet :  $\alpha$
- Tangage :  $\beta$
- Roulis :  $\gamma$



**Utilités**

Le vecteur taux de rotation est fondamentale en cinématique et dynamique, car il sert à déterminer la vitesse en tout point d'un solide et à dériver les vecteurs.

**Formule de Varignon** La formule de Varignon permet de calculer le champ de vecteurs vitesse relative d'un solide  $S_i$  par rapport à un autre solide  $S_0$

$$\vec{V}(B; i/0) = \vec{V}(A; i/0) + \overline{BA} \wedge \vec{\Omega}(i/0)$$

où  $\vec{\Omega}(2/1)$  est le vecteur taux de rotation de 2 par rapport à la base 1.

**Formule de Bour** La formule de Bour, ou formule de la base mobile, permet de relier la dérivée d'un vecteur dans la  $\mathcal{B}_1$  liée au solide 1 à celle dans la base  $\mathcal{B}_2$  liée au solide 2.

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{v}$$

où  $\vec{\Omega}(2/1)$  est le vecteur taux de rotation de 2 par rapport à la base 1.

## 5.5 Mise à jour de l'espace de configuration à partir de l'espace des états

### Principe général

L'espace de configuration  $\mathcal{Q}$  décrit la position et l'orientation du solide, tandis que l'espace des états  $T\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}, \dot{\mathcal{Q}}\}$  inclut également les vitesses de translation et de rotation.

L'évolution du système dans le temps repose sur une intégration temporelle des vitesses :

$$\mathcal{Q}(t + \Delta t) = \mathcal{Q}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\mathcal{Q}}(\tau) d\tau$$

Dans la pratique, cette intégration est effectuée numériquement, selon différents schémas d'approximation.

### Mise à jour de la position (translation)

La position de l'origine du repère lié au solide évolue selon :

$$\vec{\mathbf{p}}_{i/0}(t + \Delta t) = \vec{\mathbf{p}}_{i/0}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \vec{\mathbf{V}}(O_i/0) d\tau$$

### Mise à jour de l'orientation (rotation)

Pour la mise à jour de l'orientation, on utilise les **quaternions unitaires**,  $q(t)$ , qui offrent une manière stable et compacte de représenter les rotations tridimensionnelles. Contrairement aux angles d'Euler, ils ne présentent pas de singularité (effet de *gimbal lock*), et leur intégration temporelle conserve automatiquement la normalisation, donc  $\det(R) = 1$ .

**Définition d'un quaternion** Un quaternion unitaire  $q$  associé à une rotation d'un angle  $\theta$  autour d'un axe unitaire  $\vec{\mathbf{u}} = (u_x, u_y, u_z)$  est défini par :

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ u_x \sin \frac{\theta}{2} \\ u_y \sin \frac{\theta}{2} \\ u_z \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix}$$

où :

- $q_0$  est la **partie scalaire**,
- $\vec{\mathbf{q}}_v = [q_1, q_2, q_3]^T$  est la **partie vectorielle**.

**Matrice de rotation associée à un quaternion unitaire,  $q \rightarrow \mathbf{R}$**  Le quaternion  $q$  définit la matrice de rotation correspondante  $\mathbf{R}(q)$  par :

$$\mathbf{R}(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}$$

**Quaternion unitaire associé à une matrice de rotation,  $\mathbf{R} \rightarrow q$** 

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\ q_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4q_0} \\ q_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4q_0} \\ q_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4q_0} \end{bmatrix}$$

**Algorithme numérique**

1. Connaître à l'instant
- $t$
- :

$$\mathbf{R}_{i/0}(t), \vec{\Omega}(i/0)$$

2. Calculer le quaternion unitaire à l'instant

$$\mathbf{R}_{i/0}(t) \rightarrow q(t)$$

3. Calculer le quaternion incrémental :

$$\delta q = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega \Delta t}{2} \\ \frac{\vec{\Omega}(i/0)}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \omega = \|\vec{\Omega}(i/0)\|$$

4. Mettre à jour :

$$q(t + \Delta t) = \delta q \otimes q(t)$$

où  $\otimes$  désigne le produit quaternionique :

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_0 q_0 - \vec{\mathbf{p}}_v \cdot \vec{\mathbf{q}}_v \\ p_0 \vec{\mathbf{q}}_v + q_0 \vec{\mathbf{p}}_v + \vec{\mathbf{p}}_v \wedge \vec{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix}$$

5. Renormaliser :

$$q(t + \Delta t) \leftarrow \frac{q(t + \Delta t)}{\|q(t + \Delta t)\|}$$

6. Reconstruire la matrice à partir du quaternion unitaire à l'instant
- $t + \Delta t$
- :

$$q(t + \Delta t) \rightarrow \mathbf{R}_{i/0}(t + \Delta t)$$

**Avantages des quaternions**

- Pas de singularité (contrairement aux angles d'Euler).
- Mise à jour numérique stable et rapide.
- Conservation automatique de la contrainte  $\det(\mathbf{R}_{i/0}) = 1$ .
- Opérations de composition de rotations simples via le produit quaternionique.

**Remarque 5.3** *Les quaternions sont aujourd'hui la représentation standard des rotations dans les logiciels de **robotique**, **CAO/FAO**, **animation 3D** et **simulation dynamique**, notamment pour leur stabilité numérique et leur efficacité dans la mise à jour de la configuration des solides rigides.*

## 5.6 Champs de vecteurs vitesse relative d'un solide $S_1$ par rapport à un solide $S_0$

La vitesse relative dans le mouvement  $S_1$  par rapport  $S_0$  correspond à la vitesse du point  $M$ , considéré comme fixe dans le repère liée à 1, dans son mouvement par rapport à  $S_0$ . Elle a pour expression :

$$\vec{V}(M; 1/0) = \vec{V}(M/1) - \vec{V}(M/0)$$

### Formule de Varignon

La vitesse relative dans le mouvement 1 par rapport 0 peut être déterminée en tous points  $M$  de l'espace à partir de l'espace d'état, en utilisant le formule de Varignon :

$$\vec{V}(M; 1/0) = \vec{V}(O_1; 1/0) + \overrightarrow{MO_1} \wedge \vec{\Omega}(1/0)$$

avec  $O_1$  l'origine de  $S_1$ .

Dans la pratique, une telle relation permet de déterminer la vitesse d'un point dont le mouvement est complexe en considérant une suite de référentiels successifs, chacun en mouvement "simple" les uns par rapport aux autres.

### Propriété d'équiprojectivité

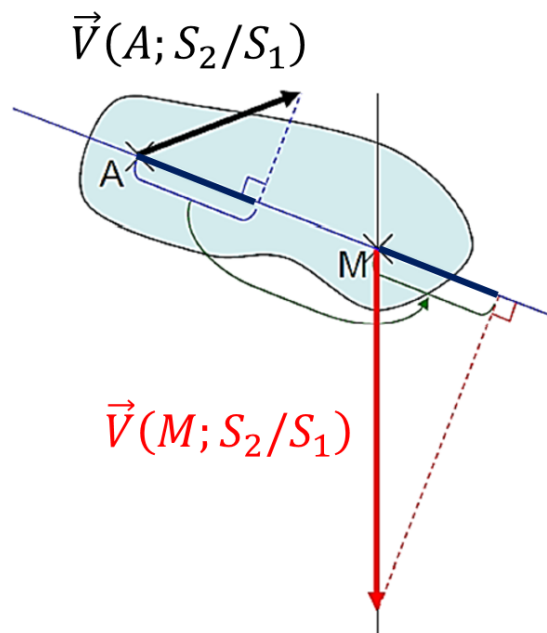


FIGURE 5.1 – Illustration de la propriété d'équiprojectivité entre deux points  $A$  et  $M$  d'un solide rigide.

La propriété d'équiprojectivité est une caractéristique fondamentale du mouvement d'un solide indéformable. Elle énonce que, pour un même solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un autre  $S_0$ , les vitesses de deux points quelconques  $A$  et  $M$  ont des projections égales sur la droite qui les relie :

$$\vec{V}(A, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} = \vec{V}(M, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}}$$

Autrement dit, dans un solide rigide, la composante des vitesses selon la direction du segment  $AM$  est identique pour tous les points du solide. Cette propriété traduit le fait que la distance entre deux points d'un solide indéformable reste constante au cours du mouvement.

**Démonstration** À partir de la relation fondamentale du mouvement d'un solide :

$$\vec{V}(M, 1/0) = \vec{V}(A, 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{\mathbf{AM}}$$

On projette cette relation sur la direction  $\overline{\mathbf{AM}}$  :

$$\vec{V}(M, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} = \vec{V}(A, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} + (\vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{\mathbf{AM}}) \cdot \overline{\mathbf{AM}}$$

Le dernier terme est nul car le produit mixte d'un vecteur avec lui-même est nul :

$$(\vec{\Omega} \wedge \overline{\mathbf{AM}}) \cdot \overline{\mathbf{AM}} = 0$$

D'où la propriété :

$$\vec{V}(A, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} = \vec{V}(M, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{AM}} \quad (\text{CQFD})$$

## 5.7 Composition de mouvement

En cinématique, il est possible et utile de composer les mouvements, lorsque plusieurs solides sont en liaison les uns avec les autres.

Toutes les règles de composition de mouvement sont données pour le cas deux solides  $S_1$  et  $S_2$ , elles s'étendent naturellement et sans difficulté au cas de  $N$  solides.

**Composition des vecteurs placements** : relation de Chasles

$$\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2}$$

**Composition des matrice de rotation**

$$\mathbf{R}_{2/0} = \mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0}$$

**Composition des matrices de transformation homogène**

$$\mathbf{T}_{2/0} = \mathbf{T}_{2/1} \cdot \mathbf{T}_{1/0}$$

**Composition des vecteurs vitesse de rotation**

$$\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0)$$

**Composition des vecteurs vitesses relatives**

$$\vec{V}(A; 2/0) = \vec{V}(A; 2/1) + \vec{V}(A; 1/0)$$

Cette expression est valable en tous points  $A$  de l'espace à condition que les trois vitesses relatives soient exprimées au même point.

**Remarque 5.4** *Il n'existe pas de relation de composition aussi simple pour les accélérations.*

*Soit un référentiel  $\mathcal{R}_1(O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$  en mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . L'expression de l'accélération absolue du point  $A$  par rapport du référentiel galiléen se décompose en trois terme*

$$\vec{a}(A/\mathcal{R}_g) = \vec{a}(A/\mathcal{R}_1) + \vec{a}_{ent}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) + \vec{a}_{Cor}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g)$$

où on a

**L'accélération absolue** : L'accélération du point  $A$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$

$$\vec{a}(A/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{O_1A}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_g}$$

**L'accélération relative** : L'accélération du point  $A$  dans le référentiel mobile  $\mathcal{R}_1$

$$\vec{a}(A/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{O_1A}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_1}$$

**L'accélération d'entraînement de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_g$**  :  $\vec{a}_{ent}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g)$

$$\vec{a}_{ent}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) = \vec{a}(O_1/\mathcal{R}_g) + \left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{O_1A} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) \wedge \left( \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) \wedge \overrightarrow{O_1A} \right)$$

L'accélération d'entraînement traduit l'effet du mouvement de référentiel mobile  $\mathcal{R}_1$  d'origine  $O_1$  sur le point observé  $A$  : elle représente les accélérations que subirait le point  $A$  s'il était immobile dans  $\mathcal{R}_1$ , c'est-à-dire celles dues à la translation et à la rotation de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_g$ .

**L'accélération de Coriolis** qui est due à la rotation du solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$

$$\vec{a}_{cor}(A; \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_1)$$

*L'accélération de Coriolis traduit l'effet de la rotation du repère  $\mathcal{R}_1$  sur le mouvement relatif du point  $A$  à l'intérieur de ce repère : elle apparaît uniquement lorsque le repère  $\mathcal{R}_1$  tourne par rapport à  $\mathcal{R}_g$  et que le point  $A$  se déplace dans  $\mathcal{R}_1$ .*

# MODÉLISATION DES SYSTÈMES DE SOLIDES INDÉFORMABLES

Dans des mécanismes les mouvements relatifs entre solides sont limités par l'existence de liaisons entre les différentes pièces du mécanisme. Ainsi, un système de solides est constitué de deux sous-ensembles :

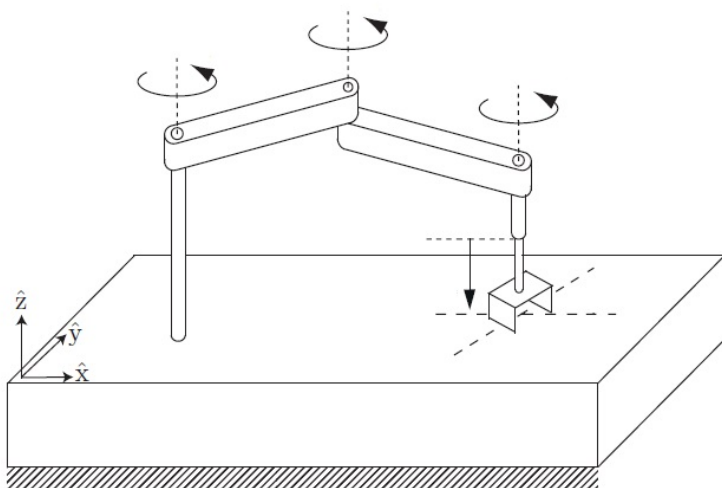
- l'ensemble des solides indéformables ;
- l'ensemble des liaisons entre solides.

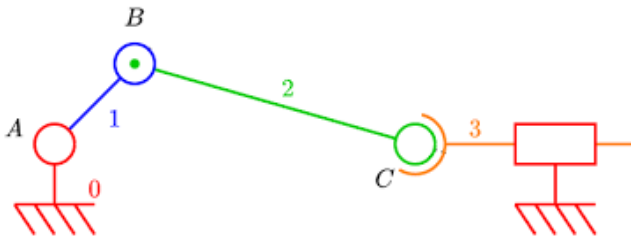
Le système de solides pourra donc être représenté par des graphes, dont l'analyse permet de définir l'espace de configuration minimale et par conséquent le paramétrage. Il existe deux types de graphe :

**Graphe cinématique** : les liaisons constituent les sommets, les solides constituent les arcs.

**Graphe de structure** : les solides constituent les sommets, les liaisons constituent les arcs.

## Exemple 1 : Robot SCARA



**Exemple 2 : Système bielle manivelle**

**Remarque 6.1** *Le graphe de structure est un outil d'analyse performant pour :*

- déterminer la mobilité du système, c'est-à-dire son espace de configuration minimal du système ;
- faire le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME)
- choisir les sous-systèmes à isoler pour appliquer les théorèmes généraux de la dynamique et choisir les projections pertinentes à effectuer.

## 6.1 Paramétrage des liaisons cinématiques

L'espace de configuration d'un solide dans l'espace est défini par 6 paramètres ou degrés de libertés (ddl) :

- 3 translations
- 3 rotations

Les liaisons cinématiques permettent de bloquer un certain nombre de ces ddl. Autrement dit, se sont des contraintes géométriques ou cinématiques qui diminuent la dimension de l'espace de configuration et de l'espace d'état du système.

### Degrés de liberté d'une liaison (ddl)

Pour chaque translation libre, nous devons ajouter un paramètre de distance inconnue et pour chaque rotation un paramètre d'angle inconnue.

Pour des raisons pratiques et pour éviter d'exprimer les matrices de rotation, on utilise également le torseur cinématique pour paramétrer une liaison entre deux solides, au travers de paramètres de vitesses et de vitesses angulaires.

**Torseur cinématique** du solide du  $S_2$  par rapport à  $S_1$  exprimé au point  $A$

$$\left\{ \mathcal{V}^{(2/1)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} (2/1) \\ \vec{V} (A; 2/1) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, V_{21}, W_{21}) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

où

- $\vec{\Omega} (2/1)$  est le vecteur taux de rotation de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ .

- $\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}$  sont les vitesses angulaire associés aux ddl rotations.
- $\vec{V}(A; 2/1)$  est le vecteur vitesse relative au point  $A$  de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ .
- $U_{21}, V_{21}, W_{21}$  sont les vitesses associés aux ddl de translations.

**Remarque 6.2** *Le choix des indices  $\circ_{21}$  permet de préciser que c'est le mouvement de 2 par rapport à 1. Ceci est important pour éviter les erreurs de signes, en outre si on change l'ordre des indices où doit changer le signe de paramètre cinématique :*

$$\dot{\alpha}_{21} = -\dot{\alpha}_{12} \quad \text{et} \quad U_{21} = -U_{12}.$$

**Remarque 6.3** *Le choix du point  $A$  et de la base de  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  n'est pas unique. Il doit être conforme c'est-à-dire en accord avec les contraintes cinématiques imposées. Un choix judicieux permettra de réduire les calculs.*

## Multiplicateurs de Lagrange ou Inconnues statiques ( $I_s$ )

Pour bloquer un mouvement, il est nécessaire d'ajouter un multiplicateur de Lagrange ou une inconnue statique. La nature du multiplicateur de Lagrange change en fonction de celle du mouvement bloqué. On utilise :

**Une inconnue de force :** pour bloquer un ddl de translation (Unité  $[N]$ ).

**Une inconnue de couple :** pour bloquer un ddl de rotation (Unité  $[N.m]$ ).

On également utilisé un torseur pour représenter les inconnues statiques.

**Torseur d'inter-effort**  $S_2$  sur le solide  $S_1$  en  $A$

$$\left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A; 2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (L_{21}, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

où

- $\vec{F}(2 \rightarrow 1)$  est la force de contact de  $S_2$  sur  $S_1$ .
- $X_{21}, Y_{21}, Z_{21}$  sont les multiplicateurs de Lagrange permettant de bloquer les ddl de translation.
- $\vec{M}(A; 2 \rightarrow 1)$  est le vecteur moment au point  $A$  de  $S_2$  sur  $S_1$ .
- $L_{21}, M_{21}, N_{21}$  sont les multiplicateurs de Lagrange permettant de bloquer les ddl de rotation.

**Remarque 6.4** *Le choix du point  $A$  et de la base de  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  doit être le même pour celui du torseur cinématique. Il doit donc être par conséquent conforme aux contraintes cinématique et permettre de simplifier les calculs.*

## 6.2 Inventaires des liaisons mécaniques normalisées

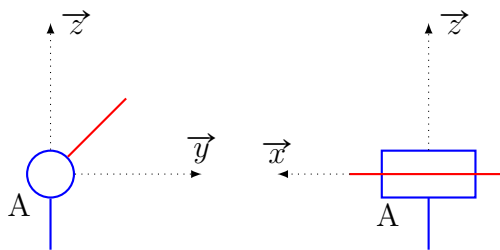
### Liaisons élémentaires

L'association deux à deux des surfaces élémentaires permet d'introduire les liaisons parfaites sont réalisées par contact de surface élémentaire (voir Tableau 6.1). Il est possible de les imposer par une seule contrainte de coïncidence en CAO entre deux entités géométriques élémentaires tels qu'un plan, une ligne et un point.

Liaison élémentaire	Surfaces en compact	Coïncidence CAO	ddl	$I_s$
<b>Appui-plan (AP)</b> de normal $\vec{n}$	Plan-Plan	Plan-Plan	3 2T 1R	3
<b>Pivot-glissant (PG)</b> d'axe $(O, \vec{x})$	Cylindre-Cylindre	Ligne-Ligne	2 1T 1R	4
<b>Rotule (R)</b> de centre $O$	Sphère-Sphère	Point-Point	3 0T 3R	3
<b>Linéaire rectiligne (LR)</b> de normal $\vec{n}$ et de direction $\vec{x}$	Cylindre-Plan	Ligne-Plan	4 2T 2R	2
<b>Appui-ponctuel (Po)</b> d'axe $(A, \vec{n})$	Sphère - Plan	Point-Plan	5 2T 3R	1
<b>Linéaire-annulaire (LA)</b> d'axe $(O, \vec{x})$	Sphère-Cylindre	Point-Ligne	4 1T 3R	1

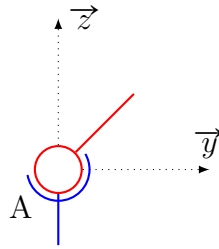
TABLE 6.1 – Liste des liaisons élémentaires avec leur contrainte de coïncidence géométrique associé en CAO.

Liaison pivot-glissant (2 ddl,  $I_s = 4$ )



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_{21}, 0, 0) \\ (U_{21}, 0, 0) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (0, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}$$

Ces expressions sont valables pour tous les points  $A$  appartenant à l'axe  $(A, \vec{x})$  et dans tous les repères orthonormés directs contenant  $\vec{x}$ .

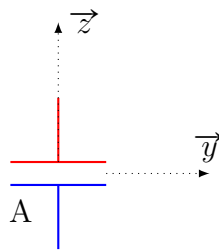


**Liaison rotule (3 ddl,  $I_s = 3$ )**

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}}_{(-,-,-)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}}_{(-,-,-)}$$

Ces expressions sont **valables au centre de liaison rotule A et dans tous les repères orthonormés directs.**

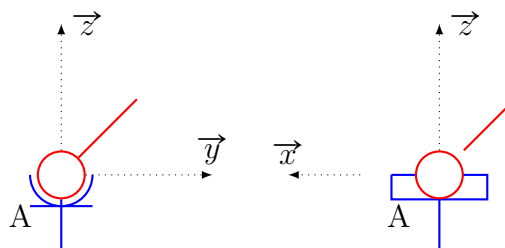
**Liaison appui-plan (3 ddl,  $I_s = 3$ )**



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (0, 0, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, V_{21}, 0) \end{array} \right\}}_{(-,-,\vec{z})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (0, 0, Z_{21}) \\ (L_{21}, M_{21}, 0) \end{array} \right\}}_{(-,-,\vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables pour tous les points A de l'espace et dans tous les repères orthonormés directs contenant  $\vec{z}$ .**

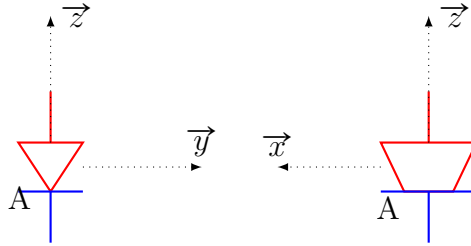
**Liaison linéaire annulaire (4 ddl,  $I_s = 2$ )**



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = {}_A \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = {}_A \left\{ \begin{matrix} (0, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}$$

Ces expressions sont **valables pour tous les points A appartenant à l'axe (A,  $\vec{x}$ ) et dans tous les repères orthonormés directs contenant  $\vec{x}$ .**

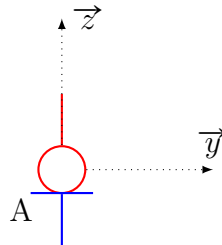
**Liaison linéaire rectiligne (4 ddl,  $I_s = 2$ )**



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = {}_A \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, 0, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, V_{21}, 0) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = {}_A \left\{ \begin{matrix} (0, 0, Z_{21}) \\ (0, M_{21}, 0) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables pour tous les points A appartenant à l'axe (A,  $\vec{x}$ ) et dans l'unique repère orthonormés directs ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) liée au solide contenant la ligne de contact, ici le solide supérieur.**

**Liaison appui-pontuel (5 ddl,  $I_s = 1$ )**



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = {}_A \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (U_{21}, V_{21}, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, \vec{z})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = {}_A \left\{ \begin{matrix} (0, 0, Z_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables pour tous les points A appartenant à l'axe (A,  $\vec{z}$ ) et dans tous les repères orthonormés directs contenant  $\vec{z}$ .**

**Liaisons composées**

Les liaisons élémentaires offrent un premier choix mais ne couvrent que 6 possibilités. L'imagination peut conduire vers d'autres solutions obtenues en combinant les liaisons élémentaires. L'association de liaisons élémentaires conduit aux liaisons composées.

Il existe deux manières de combiner les liaisons pour obtenir de nouvelles liaisons :

**Liaisons en série :** on introduit une solide intermédiaire  $S_3$  entre le solide  $S_1$  et le solide  $S_2$ . Pour déterminer le paramétrage de la liaison équivalente, c'est-à-dire les torseurs cinématiques et les torseurs inter-efforts de la liaison équivalente, on utilise

**Approche cinématique (Composition de mouvement)**

$$\left\{ \mathcal{V}^{eq}(2/1) \right\}_A = \left\{ \mathcal{V}(2/3) \right\}_A + \left\{ \mathcal{V}(3/1) \right\}_A$$

**Approche statique (Équilibre de  $S_3$ )**

$$\left\{ (2 \rightarrow 1)^{eq} \right\}_A = \left\{ 2 \rightarrow 3 \right\}_A = \left\{ 3 \rightarrow 1 \right\}_A$$

**Liaisons en parallèles :** on utilise plusieurs liaisons  $L1$  et  $L2$  entre les solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour déterminer le paramétrage de la liaison équivalente on utilise

**Approche cinématique (Fermeture cinématique)**

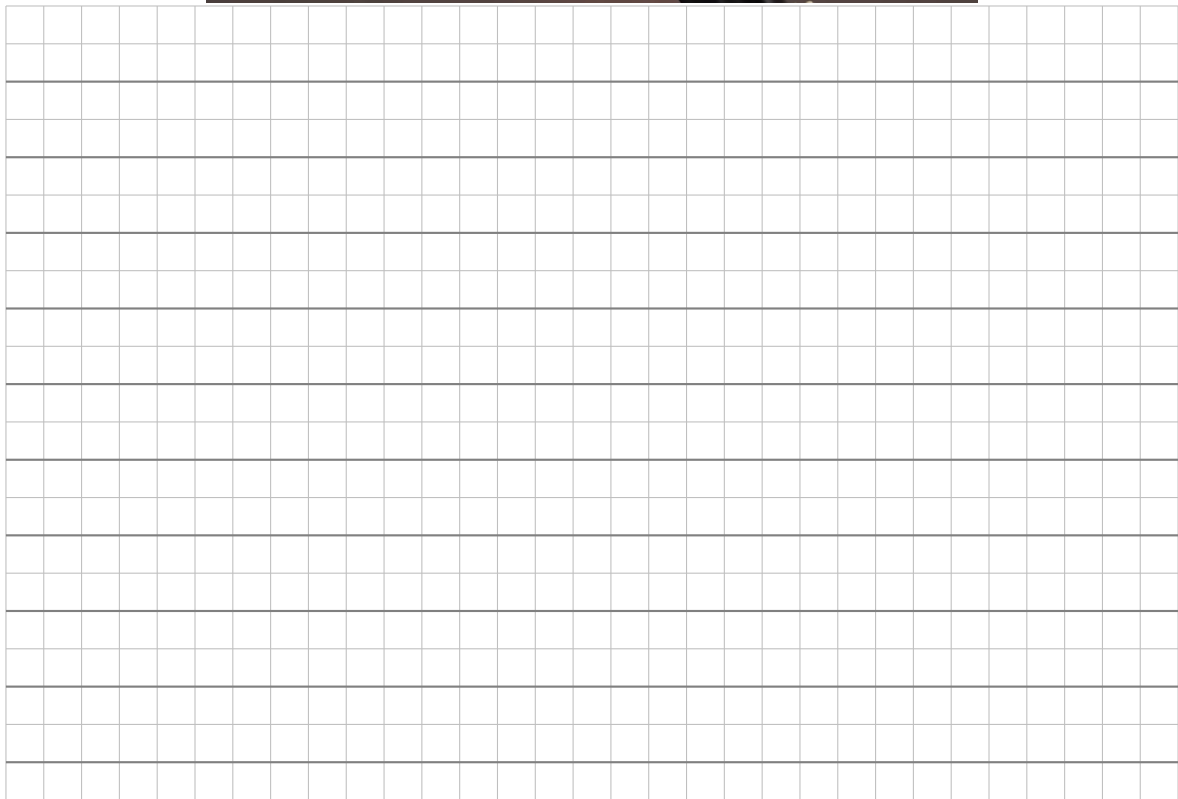
$$\left\{ \mathcal{V}^{eq}(2/1) \right\}_A = \left\{ \mathcal{V}^{L1}(2/1) \right\}_A = \left\{ \mathcal{V}^{L2}(2/1) \right\}_A$$

**Approche statique (Addition des actions mécanique)**

$$\left\{ (2 \rightarrow 1)^{eq} \right\}_A = \left\{ (2 \rightarrow 1)^{L1} \right\}_A + \left\{ (2 \rightarrow 1)^{L2} \right\}_A$$

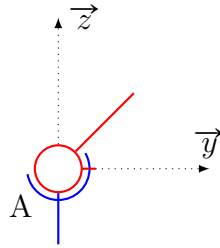
**Remarque 6.5** Dans le cas de liaisons en série, l'utilisation de l'approche cinématique est plus simple. A contrario, l'approche statique est plus simple à mettre en oeuvre pour les liaisons en parallèle.

**Exemple 3 : Joint de Cardan (*Universal joint*)**





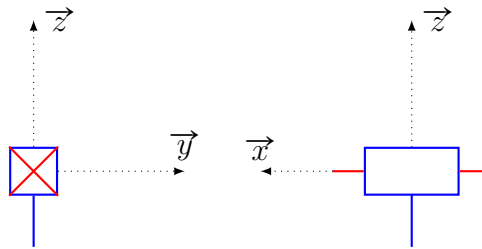
**Liaison rotule à doigt (2 ddl,  $I_s = 4$ )** La liaison rotule à doigt est une liaison rotule à laquelle un degré de liberté a été retiré.



$$\left\{ \mathcal{V}^{(2/1)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, 0, \dot{\gamma}_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, \vec{y}, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, M_{21}, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, \vec{y}, -)}$$

Ces expressions sont valables au centre de liaison  $A$  et dans tous les repères orthonormés directs contenant  $\vec{y}$ .

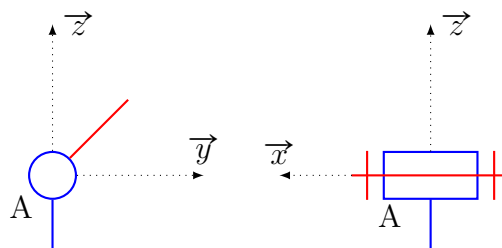
**Liaison glissière (1 ddl,  $I_s = 5$ )**



$$\left\{ \mathcal{V}^{(2/1)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} (0, 0, 0) \\ (U_{21}, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} (0, Y_{21}, Z_{21}) \\ (L_{21}, M_{21}, N_{21}) \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}$$

Ces expressions sont valables en tous points  $A$  de l'espace et dans tous les repères orthonormés directs contenant  $\vec{x}$ .

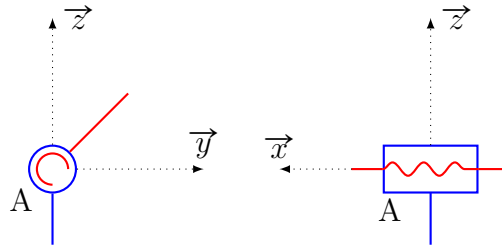
**Liaison pivot (1 ddl,  $I_s = 5$ )**



$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_{21}, 0, 0) \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, -, -)}$$

Ces expressions sont **valables en tous points de l'axe**  $(A, \vec{x})$  **et dans tous les repères orthonormés directs contenant**  $\vec{x}$ .

**Liaison hélicoïdale (1 ddl,  $I_s = 5$ )**



La liaison hélicoïdale est une liaison qui permet une translation ainsi qu'une rotation. Toutefois elle n'est qu'à un seul degré de liberté car la rotation et la translation sont liées par le pas  $p$  de l'hélice. Si la vitesse de rotation est  $\omega_x$ , alors la vitesse de translation sera égale à  $p\omega/2\pi$  pour un filet à droite et  $-p\dot{\alpha}_{21}/2\pi$  pour un filet à gauche.

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_{21}, 0, 0) \\ (h\dot{\alpha}_{21}, 0, 0) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (-hX_{21}, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, -, -)}$$

où  $h = +\frac{p}{2\pi}$  pour un filet à droite et  $h = -\frac{p}{2\pi}$  pour un filet à gauche.

Ces expressions sont **valables en tous points de l'axe**  $(A, \vec{x})$  **et dans tous les repères orthonormés directs contenant**  $\vec{x}$ .

**Liaison encastrement (0 ddl,  $I_s = 6$ )** La liaison encastrement est une liaison qui ne permet aucun degrés de liberté. Elle est également appelée **liaison complète**. Tout mouvement est interdit.

Les torseurs cinématique et d'inter-effort associés sont de la forme :

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\}}_{(-, -, -)}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (L_{21}, M_{21}, N_{21}) \end{array} \right\}}_{(-, -, -)}$$

Ces expressions sont **valables en tous points de l'espace et dans tous les repères orthonormés directs**.

**Roulement sans glissement**

FIGURE 6.1 – Géométrie d'un contact ponctuel

Dans contact ponctuel en  $I$  entre de deux solides  $S_1$  et  $S_2$ , la vitesse de glissement est définie par comme la vitesse du point  $I$  dans le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\vec{V}(I; 2/1) = \vec{V}(I/2) - \vec{V}(I/1)$$

Cette vitesse est dans le plan tangent commun  $(\pi)$ , à  $S_1$  et  $S_2$  (Figure 6.1).

La condition de roulement sans glissement impose

$$\vec{V}(I; 2/1) = \vec{0}.$$

Cette condition est imposée en ajoutant deux forces dans le plan tangent au contact au torseur d'inter effort de la liaison ponctuelle en  $I$  de normal  $\vec{n}$

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\}_I = \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha}_{21}, \dot{\beta}_{21}, \dot{\gamma}_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, \vec{n})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\}_I = \left\{ \begin{matrix} (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) \\ (0, 0, 0) \end{matrix} \right\}_{(-, -, \vec{n})}$$

Ces expressions sont valables au point de contact  $I$  et dans tous les repères orthonormés directs contenant  $\vec{n}$ .

**Exemple 5 : Engrenages**



**Remarque 6.6** Les engrenages sont généralement modélisés par des liaisons appui-ponctuel dans les problèmes plans et par des liaisons linéaires rectilignes en trois dimensions. Pour

parfaire cette modélisation, il est nécessaire d'adjoindre une condition de roulement sans glissement, c'est-à-dire que la vitesse de glissement entre les roues dentées est nulle

$$\vec{V}(I; 2/1) = \vec{0}$$

où  $I$  est le point de contact des deux roues dentées.

**Remarque 6.7** Pour des transmissions par adhérence de type poulie-courroie, roues de friction ou pneu-route, la condition de roulement sans glissement est valable tant que les efforts dans le plan tangent restent inférieur à la force limite d'adhérence  $\|\vec{\mathbf{F}}_f\| = \mu_s |Z_{21}|$ ,

$$\|\vec{\mathbf{F}}_t\| = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2} < \|\vec{\mathbf{F}}_f\|.$$

## En deux dimensions

Dans le cas d'un problème bidimensionnelle, il suffit de trois degrés de liberté pour repère deux solides l'un par rapport à l'autre :

- les deux translations du plan
- une rotation d'axe orthogonal au plan

Ces degrés de liberté sont les mêmes que ceux de la liaison appui-plan.

Il existe quatre liaisons normalisés dans le plan :

**Liaison appui-ponctuel (2 ddl,  $I_s = 1$ )** d'axe  $(A, \vec{x})$  avec  $\vec{x}$  dans le plan

$$\left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = \left. \left\{ \begin{array}{c} \omega_{21} \vec{z} \\ (0, 0, 0) \end{array} \right\} \right|_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = \left. \left\{ \begin{array}{c} (X_{21}, 0) \\ \vec{0} \end{array} \right\} \right|_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables en tous points  $A$  de l'axe  $(A, \vec{x})$  et dans l'unique repère orthonormé direct  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .**

**Liaison pivot (1 ddl,  $I_s = 2$ )** de direction  $(A, \vec{z})$  avec  $\vec{z}$  la normale au plan

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = \left. \left\{ \begin{array}{c} \omega \vec{z} \\ (0, 0) \end{array} \right\} \right|_{(-, -, \vec{z})}, \quad \left\{ S_2 \rightarrow S_1 \right\} = \left. \left\{ \begin{array}{c} (X_{21}, Y_{21}) \\ N_{21} \vec{z} \end{array} \right\} \right|_{(-, -, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables en tous points  $A$  de l'axe  $(A, \vec{x})$  et dans l'unique repère orthonormé direct  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .**

**Liaison glissière (1 ddl,  $I_s = 2$ )** d'axe  $\vec{x}$  dans le plan

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = \left. \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ (V_x, 0) \end{array} \right\} \right|_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad \left\{ S_2 \rightarrow S_1 \right\} = \left. \left\{ \begin{array}{c} (X_{21}, Y_{21}) \\ N_{21} \vec{z} \end{array} \right\} \right|_{(-, -, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables en tous points  $A$  de l'axe  $(A, \vec{x})$  et dans l'unique repère orthonormé direct  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .**

**Liaison encastrement (0 ddl,  $I_s = 3$ )**

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = \left. \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ (0, 0) \end{array} \right\} \right|_{(-, -, \vec{z})}, \quad \left\{ S_2 \rightarrow S_1 \right\} = \left. \left\{ \begin{array}{c} (X_{21}, Y_{21}) \\ N_{21} \vec{z} \end{array} \right\} \right|_{(-, -, \vec{z})}$$

Ces expressions sont **valables en tous points  $A$  de l'axe  $(A, \vec{x})$  et dans l'unique repère orthonormé direct  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .**

## 6.3 Modélisation des mécanismes

### Démarche de modélisation

Démarche pour paramétrer un système :

1. Mécanisme est-il plan ?
2. Numéroter les solides ou ensembles de solides
3. Définir les liaisons entre les solides
4. Tracer le graphe des liaisons
5. Tracer le schéma cinématique
6. Associer un repère à chaque solide
7. Paramétrer les rotations des solides en liaison (figures de calcul)
8. Définir les coordonnées des centres des liaisons
9. Paramétrer les mouvement de translation
10. Identifier l'espace de état minimal  $Q$ , c'est-à-dire choisir un paramétrage conforme minimum

### Mobilité

La mobilité d'un système est la dimension de l'espace de configuration  $Q$  minimale conforme aux contraintes. La mobilité d'un système se décompose en une mobilité interne et mobilité utile

$$m = m_u + m_i$$

La mobilité utile correspond au nombre d'actionneurs (moteurs ou pistons) nécessaire au fonctionnement du système. La mobilité interne  $m_i$  n'a aucun rôle fonctionnel, elle correspond à un mouvement d'un solide ou d'un ensemble de solides à l'intérieur du système.

## 6.4 Éléments de théorie des mécanismes

La théorie des mécanismes utilise le concept de chaîne cinématique qui est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons mécaniques qui permettent de transmettre des mouvements.

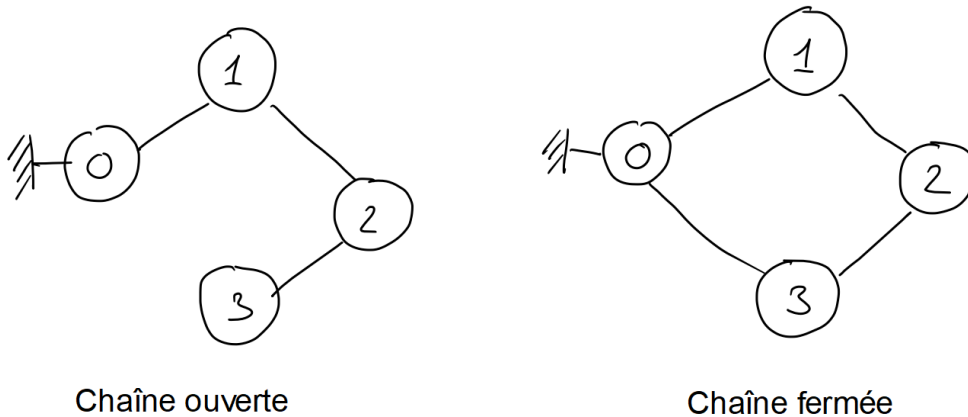
Elle peut être :

**Ouverte** les solides ne forment pas de boucle fermée

**Fermée** les solides forment une ou plusieurs boucles (chaînes fermées)

### Mécanisme en chaîne ouverte

Dans la pratique les mécanisme en chaîne ouverte sont des robots constitué le liaisons pivots et glissières. Chaque liaison élémentaire apporte un degré de liberté (ddl) :



- **Rotation** liaison pivot : le paramètre d'angle  $\theta_i$  est variable.
- **Translation** liaison glissière : le paramètre de distance  $d_i$  est variable.

L'espace de configuration ou le nombre total de degrés de liberté du mécanisme est la somme des ddl de chacune des liaisons.

**Cinématique directe** consiste à déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal (l'effecteur) à partir des ddl connues des liaisons.

**On va des ddl des liaisons vers l'extrémité du mécanisme.**

**Cinématique inverse** consiste au contraire à déterminer les valeurs des ddl nécessaires pour atteindre une position et une orientation données de l'effecteur.

**On va de l'extrémité vers les liaisons, ce qui est souvent plus complexe car il peut y avoir plusieurs solutions, voire aucune.**

**Remarque 6.8** La cinématique direct est basée sur le concept de composition de mouvement.

**Pour la position** d'un point  $P$  appartenant au solide  $S_n$ , on utilise la relation de Chasles en passant par tous les solides allant du bâti à  $S_n$

$$\overline{\mathbf{O}_0\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{O}_0\mathbf{O}_1} + \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2} + \dots + \overline{\mathbf{O}_n\mathbf{P}}$$

**Pour l'orientation** on utilise la composition des rotations

$$\mathbf{R}_{n/0} = \mathbf{R}_{n/n-1} \cdot \mathbf{R}_{n-1/n-2} \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0}$$

**Pour la vitesse**  $\vec{\mathbf{V}}(P/0)$  on utilise la composition des vitesses relatives

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{V}}(P/0) &= \vec{\mathbf{V}}(P; n/0) \\ &= \vec{\mathbf{V}}(P; n/n-1) + \vec{\mathbf{V}}(P; n-1/n-2) + \dots + \vec{\mathbf{V}}(P; 2/1) + \vec{\mathbf{V}}(P; 1/0) \end{aligned}$$

**Pour le vecteur taux de rotation**  $\vec{\mathbf{\Omega}}(n/0)$  on utilise la composition des vecteurs taux de rotation

$$\vec{\mathbf{\Omega}}(n/0) = \vec{\mathbf{\Omega}}(n/n-1) + \vec{\mathbf{\Omega}}(n-1/n-2) + \dots + \vec{\mathbf{\Omega}}(2/1) + \vec{\mathbf{\Omega}}(1/0)$$

### Paramétrisation des liaisons d'un robot en chaîne ouverte

La paramétrisation des liaisons d'un robot en chaîne ouverte obéit à des conventions précises afin de décrire rigoureusement la cinématique du système. La convention la plus couramment utilisée est celle de **Denavit–Hartenberg (DH)**.

**Principe général** Pour chaque liaison  $L_i$  entre le solide  $S_i$  et  $S_{i-1}$  :

- On associe un **repère**  $R_i$  au solide  $S_i$ .
- L'axe  $\vec{z}_i$  du repère correspond à l'axe de la liaison :
  - pour une liaison pivot, c'est l'axe de rotation ;
  - pour une liaison glissière, c'est l'axe de translation.
- L'axe  $\vec{x}_i$  est choisi pour relier les axes  $\vec{z}_{i-1}$  et  $\vec{z}_i$ , ou être perpendiculaire à ces deux axes.
- L'axe  $\vec{y}_i$  complète la base orthonormée directe  $\vec{y}_i = \vec{z}_i \wedge \vec{x}_i$ .

**Paramètres de Denavit–Hartenberg** Chaque transformation entre deux repères successifs  $\mathcal{R}_{i-1}$  et  $\mathcal{R}_i$  est décrite par quatre paramètres DH :

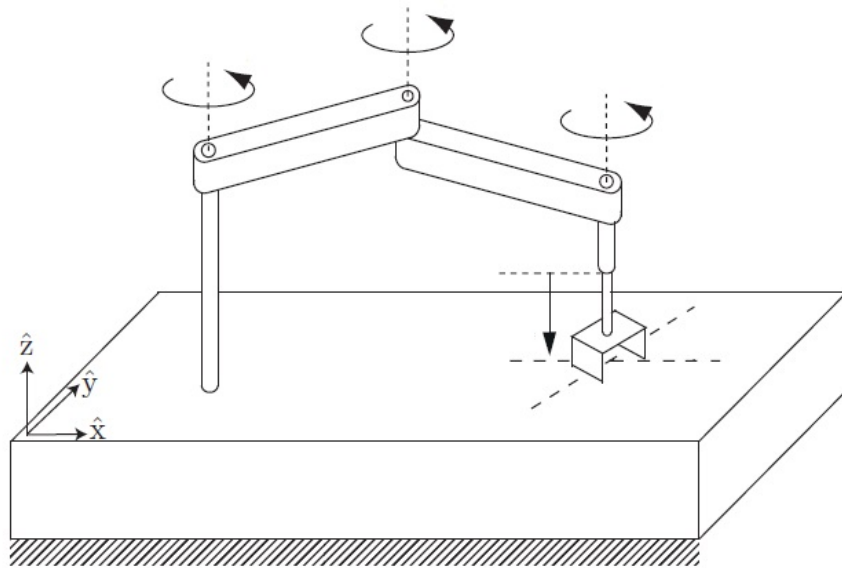
Nom	Symbole	Signification	Variable ?
Angle de torsion	$\alpha_{i-1}$	Angle entre $\vec{z}_{i-1}$ et $\vec{z}_i$ autour de $\vec{x}_{i-1}$	Fixe
Longueur du bras	$a_{i-1}$	Distance entre $\vec{z}_{i-1}$ et $\vec{z}_i$ selon $\vec{x}_{i-1}$	Fixe
Décalage	$d_i$	Distance entre les origines selon $\vec{z}_i$	ddl
Angle de rotation	$\theta_i$	Rotation autour de $\vec{z}_i$	ddl

### Procédure de paramétrisation

1. Identifier chaque liaison (pivot ou glissière).
2. Associer un repère à chaque maillon.
3. Placer les axes  $\vec{z}_i$  selon les axes de liaison.
4. Définir  $\vec{x}_i$  selon la géométrie (perpendiculaire ou joignant deux axes).
5. Renseigner les quatre paramètres DH.
6. Établir les matrices de transformation homogènes  $\mathbf{T}_{i/i-1}$ .
7. Multiplier les matrices pour obtenir la **cinématique directe** du robot.

$$\mathbf{T}_{n/0} = \mathbf{T}_{n/n-1} \cdot \mathbf{T}_{n-1/n-2} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{2/1} \cdot \mathbf{T}_{1/0}$$

Exemple 6 : Robot SCARA



## Mécanisme en chaîne fermé

Lorsqu'il y a des chaînes fermées de solides dans un mécanisme, on introduit des relations entre les ddl du mécanismes. Il est alors possible de déterminer la configuration du mécanisme avec un nombre de ddl restreint à la mobilité du système  $m$ .

Pour obtenir, les relations cinématiques reliant les différents ddl du mécanisme, nous pouvons utiliser  $\gamma$  fermeture géométrique ou cinématique, où  $\gamma$  est le nombre maximal de chemins fermés indépendants. Ce nombre s'appelle le **nombre cyclomatique** et vaut :

$$\gamma = N_l - N_s + 1$$

où  $N_l$  est le nombre de liaisons et  $N_s$  est le nombre de solides.

### Fermeture géométrique

Lorsque dans le graphe de liaison apparaît un chemin fermé,  $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n, S_1)$  alors, la fermeture géométrique de ce chemin s'écrit :

$$\overrightarrow{O_1 O_2} + \dots + \overrightarrow{O_{n-1} O_n} + \overrightarrow{O_n O} = \vec{0}$$

et

$$\mathbf{R}_{0/n} \cdot \mathbf{R}_{n/n-1} \cdot \mathbf{R}_{n-1/n-2} \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_{2/1} \cdot \mathbf{R}_{1/0} = \mathbf{Id}$$

où  $Id$  est la matrice identité. Pour chaque chemin fermé, on obtient six équations scalaires. Dans la pratique, on utilise que la première relation qu'on a l'habitude de noter :

**Fermeture géométrique :**

$$\overrightarrow{OO} = \vec{0}$$

Cette relation donne au maximum dans le cas tridimensionnelle trois équations scalaires indépendantes.

### Fermeture cinématique

Si le chemin fermé possède des liaisons cinématiques, il est possible alors écrire une équation de fermeture cinématique portant sur le torseur cinématique du chemin fermé :

**Fermeture cinématique :**

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(n/1) &= \vec{\Omega}(n/n-1) + \dots + \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(M; n/1) &= \vec{V}(M; n/n-1) + \dots + \vec{V}(M; 3/2) + \vec{V}(M; 2/1) \end{aligned}$$

Dans cette expression, toutes vitesses relatives doivent impérativement être écrites au même point  $M$ . Cette expression conduit également à six équations scalaires qui sont les dérivées de celle obtenue par la fermeture géométrique associée au même chemin fermé.

**Remarque 6.9** *Le choix d'utiliser une fermeture géométrique ou une fermeture cinématique sera guidé par des conditions de simplicité de mise en œuvre et conduira souvent à une procédure mixte. Dans la pratique on préfère la fermeture cinématique pour le vecteur taux de rotation bien plus simple que l'utilisation des matrices de rotation. D'un autre côté la fermeture géométrique  $\vec{OO} = \vec{0}$  est souvent plus simple que la fermeture cinématique qui nécessite le calcul des vitesses en un même point  $M$ .*

### Degré d'hyperstatisme

La présence de chaîne fermée dans le mécanisme entraîne une dépendance entre les multiplicateurs de Lagrange et donc entre les contraintes géométriques.

Il se peut que le système soit sur-contraint c'est-à-dire hyperstatique. Le degré d'hyperstatisme  $h$  permet de mesurer le caractère hypercontraint du mécanisme, il est défini par

$$h = N_c - N_g$$

où  $N_c$  est le nombre de multiplicateur de Lagrange ou d'inconnues statiques. Il s'obtient en additionnant les inconnues statiques de chaque liaison.

Le  $N_g$  est le nombre d'équations statiques indépendantes défini par

$$N_g = \begin{cases} 6(n-1) - m & \text{en 3D} \\ 3(n-1) - m & \text{en 2D} \end{cases}$$

$N_g$  dépend du nombre de solides que l'on peut isoler et de la mobilité système  $m$ . Le nombre de solides que l'on peut isoler est  $(n-1)$ , car on ne peut pas isoler le bâti.

Il est également possible de déterminer le degré d'hyperstatisme à l'aide d'une analyse cinématique du système qui conduit à l'expression suivante

$$h = \begin{cases} 6\gamma + m - I_c & \text{en 3D} \\ 3\gamma + m - I_c & \text{en 2D} \end{cases}$$

avec  $\gamma$  le nombre cyclomatique et  $I_c$  le nombre total de dll des liaisons.

### Systèmes isostatiques et hyperstatiques

Une fois que l'on a calculé le degré d'hyperstatisme trois cas se présentent à nous :

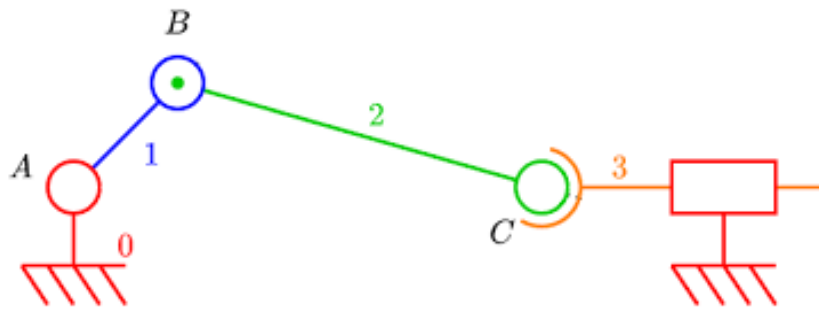
**$h < 0$**  Le problème est mal posé, les conditions ou les contraintes imposées sont trop fortes. Le problème n'est pas soluble. Il faut revenir sur les hypothèses faites lors de la modélisation, si le problème est concret. S'il s'agit d'un devoir, revoyez votre dénombrement des inconnues et de la mobilité, vous vous êtes sûrement trompé quelque part car  $h$  est par définition positif.

**$h > 0$**  Le système est **hyperstatique** (trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations). Il faut introduire des lois de comportement supplémentaires, soit lois de frottement (loi de Coulomb), soit des lois de déformation élastique (lois de Hook) qui sont

abordées dans les cours de Résistance des Matériaux (RdM) et de mécanique des milieux continus (MMC).

$h = 0$  tout va bien, nous avons autant d'équations que d'inconnues. Le système est **iso-statique**.

### Exemple 7 : Système bielle-manivelle







## DYNAMIQUE D'UN ENSEMBLE DE POINTS MATÉRIELS

### 7.1 Rappel de dynamique du point matériel

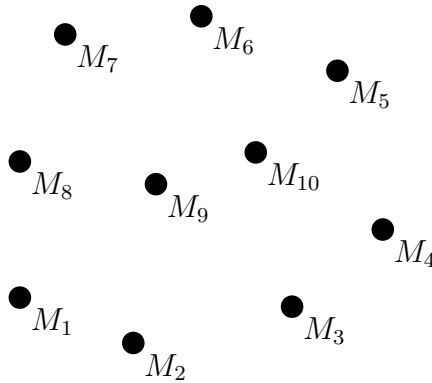


FIGURE 7.1 – Ensemble de points matériels

Soit un ensemble  $\Sigma = \{M_1, M_2, \dots, M_N\}$  de  $N$  points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$ . Si on applique le PDF à chacun des points, on obtient  $N$  équations vectorielles

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathbf{F}}(\Sigma \rightarrow M_i) + \vec{\mathbf{F}}(\bar{\Sigma} \rightarrow M_i)$$

où  $\vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g) = m_i \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g)$  est la quantité de mouvement du point  $M_i$ ;  $\vec{\mathbf{F}}(\bar{\Sigma} \rightarrow M_i)$  la somme des forces extérieures à  $\Sigma$  sur  $M_i$  et  $\vec{\mathbf{F}}(\Sigma \rightarrow M_i)$  est la somme des forces exercées par les autres points  $M_j$  sur  $M_i$  tel que

$$\vec{\mathbf{F}}(\Sigma \rightarrow M_i) = \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{F}}(j \rightarrow i)$$

Il est également possible d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dT(\Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

où l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétique de chaque point matériel

$$T(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \vec{\mathbf{P}}(M/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{\mathbf{V}}^2(M_i/\mathcal{R}_g)$$

et la puissance des efforts extérieurs à  $\Sigma$

$$\mathcal{P}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}(\bar{\Sigma} \rightarrow M_i) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g)$$

et la puissance des efforts intérieurs à  $\Sigma$

$$\mathcal{P}_{int} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}(\Sigma \rightarrow M_i) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \vec{\mathbf{F}}(M_j \rightarrow M_i) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g)$$

**Remarque 7.1** La puissance des efforts intérieurs peut être ré-écrite sous la forme suivante pour faire intervenir les forces réciproques entre deux points matériels  $M_i$  et  $M_j$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int} &= \sum_i \sum_{j>i} \left( \vec{\mathbf{F}}(M_j \rightarrow M_i) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g) + \vec{\mathbf{F}}(M_i \rightarrow M_j) \cdot \vec{\mathbf{V}}(M_j/\mathcal{R}_g) \right) \\ &= \sum_i \sum_{j>i} \vec{\mathbf{F}}(M_j \rightarrow M_i) \cdot \left( \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g) - \vec{\mathbf{V}}(M_j/\mathcal{R}_g) \right) \end{aligned}$$

Nous verrons dans la suite que ce terme s'annule lorsque le système de points matériels est indéformable.

L'expression de ce terme est au centre de la théorie des milieux continus, c'est-à-dire de la mécanique des fluides et de l'élasticité des solides.

## 7.2 Principes généraux et stratégie de modélisation

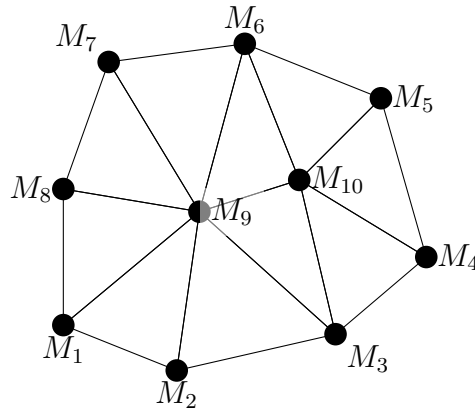


FIGURE 7.2 – Ensemble indéformable de points matériels

Pour analyser la dynamique d'un ensemble indéformable  $\Sigma$  de points matériels, on remplace les  $N$  équations vectorielles décrivant le mouvement de chacun des points matériels

par seulement **deux équations vectorielles**, portant sur le mouvement de translation et le mouvement de rotation de  $\Sigma$ . Pour se faire, on procède classiquement en trois étapes complémentaires :

1. **Cinématique** : elle décrit la position, la vitesse et l'accélération de chacun des points de  $\Sigma$  à partir des variables de l'espace d'état. Elle fournit donc la géométrie du mouvement indépendamment de ses causes.
2. **Cinétique** : elle introduit les grandeurs globales associées au mouvement de  $\Sigma$ , notamment l'énergie cinétique, la quantité de mouvement et le moment cinétique. Ces grandeurs permettent de relier le mouvement  $\Sigma$  à la répartition spatiale des masse  $m_i$ .
3. **Dynamique** : elle établit les équations du mouvement en reliant les actions mécaniques extérieures appliquées à  $\Sigma$  aux grandeurs cinématiques et cinétiques définies précédemment. Elle conduit aux lois fondamentales de la dynamique.

## 7.3 Cinématique

Dans le cas d'un système de points indéformables  $\Sigma$ , la position de tout les points est défini dans une repère  $\mathcal{R}_\Sigma(O_\Sigma, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  lié à l'ensemble de points  $\Sigma$ . La position de chaque point dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g(O, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$  est obtenue à partir de la position de l'origine  $O_\Sigma$  et de l'orientation de la base  $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  au travers de la relation

$$\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OO_\Sigma} + \overrightarrow{O_\Sigma M_i}$$

avec  $\overrightarrow{O_\Sigma M_i} = X_i \vec{\mathbf{i}} + Y_i \vec{\mathbf{j}} + Z_i \vec{\mathbf{k}}$  où  $X_i, Y_i$  et  $Z_i$  sont les coordonnées du point  $M_i$  dans le repère "local"  $\mathcal{R}_\Sigma$ . Puisque l'ensemble de points est indéformable alors ces coordonnées sont indépendantes du temps.

De la même manière que pour un solide, l'espace des états est

$$\mathcal{TQ} = \left\{ \overrightarrow{OO_\Sigma}, \mathbf{R}(\Sigma/\mathcal{R}_g), \vec{\mathbf{V}}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g), \vec{\mathbf{\Omega}}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g) \right\}$$

On peut donc écrire la vitesse de chaque point  $M_i$  en fonction de la vitesse  $\vec{\mathbf{V}}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g)$  et du vecteur taux de rotation  $\vec{\mathbf{\Omega}}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$  à l'aide de la formule de Varignon

$$\vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathbf{V}}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g) + \overrightarrow{M_i O_\Sigma} \wedge \vec{\mathbf{\Omega}}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$$

## 7.4 Cinétique

Pour un ensemble indéformable de points  $\Sigma$ , la connaissance de l'évolution temporelle de la vitesse du point d'origine  $\vec{\mathbf{V}}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g)$  et du vecteur taux de rotation  $\vec{\mathbf{\Omega}}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$  suffit à déterminer la vitesse de tous ses points. Cette approche permet de remplacer les  $N$  équations vectorielles décrivant le mouvement de chaque point matériel par seulement deux équations : l'une pour la translation de  $\Sigma$ , l'autre pour sa rotation. Elle repose sur la décomposition de l'énergie cinétique en une contribution de translation associée à

la quantité de mouvement du solide et une contribution de rotation liée à son moment cinétique.

### Energie cinétique de $\Sigma$

$$T(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \underbrace{\frac{1}{2}\vec{V}(O_\Sigma/\mathcal{R}) \cdot \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g)}_{\text{contribution de translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}) \cdot \vec{\sigma}(O_\Sigma; \Sigma/\mathcal{R}_g)}_{\text{contribution de rotation}}$$

où

—  $\vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$  est la quantité de mouvement de  $\Sigma$  définie par

$$\vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) = \sum m_i \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_g)$$

—  $\vec{\sigma}(O_\Sigma; \Sigma/\mathcal{R}_g)$  est le moment cinétique de  $\Sigma$  au point  $O_\Sigma$

$$\vec{\sigma}(O_\Sigma; \Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum \overline{O_\Sigma M_i} \wedge \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g).$$

**Démonstration** Tout d'abord on utilise la formule de Varignon pour exprimer la vitesse des point  $M_i$  en fonction de  $\vec{V}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g)$  et de  $\vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$

$$\begin{aligned} T(\Sigma/\mathcal{R}_g) &= \sum T(M_i/\mathcal{R}_g) = \sum \frac{1}{2} \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_g) \\ &= \sum \frac{1}{2} \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \left( \vec{V}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g) + \overline{M_i O_\Sigma} \wedge \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right) \\ &= \sum \frac{1}{2} \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g) + \sum \frac{1}{2} \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \left( \overline{M_i O_\Sigma} \wedge \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right) \end{aligned}$$

Puis en utilisant la propriété du produit mixte ( $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} T(\Sigma/\mathcal{R}_g) &= \sum \frac{1}{2} \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g) + \sum \frac{1}{2} \left( \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) \wedge \overline{M_i O_\Sigma} \right) \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \\ &= \frac{1}{2} \vec{V}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g) \cdot \left[ \sum \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) \right] + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \cdot \left[ \sum \overline{O_\Sigma M_i} \wedge \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) \right] \\ &= \frac{1}{2} \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(O_\Sigma/\mathcal{R}_g) + \frac{1}{2} \vec{\sigma}(O_\Sigma; \Sigma/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g). \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

**Remarque 7.2** Dans cette démonstration, on constate que si l'on remplace le point  $O_\Sigma$  par un point  $A$  quelconque, on obtient également l'énergie cinétique sous une forme semblable mais avec la vitesse du point  $A$  et le moment cinétique exprimé au **même point**  $A$

$$T(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) + \frac{1}{2} \vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$$

Donc pour calculer l'énergie cinétique on peut utiliser n'importe quel point  $A$  à condition que la vitesse et le moment cinétique soient exprimés au même point  $A$ .

## Quantité de mouvement

La quantité de mouvement de  $\Sigma$  mesure la tendance globale du solide à persévérer dans son mouvement de translation. Elle représente donc l'« inertie de translation » de  $\Sigma$  vis-à-vis des actions extérieures qui cherchent à modifier son mouvement d'ensemble.

### Centre d'inertie

Pour obtenir une expression plus maniable de la quantité de mouvement de  $\Sigma$ , on introduit le centre d'inertie  $G$

**Centre d'inertie  $G$**  : est le barycentre des points matériels pondérés par leurs masses

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_\Sigma} \sum m_i \overrightarrow{OM_i}, \quad \forall O$$

où  $m_\Sigma = \sum m_i$  est la masse totale de  $\Sigma$ .

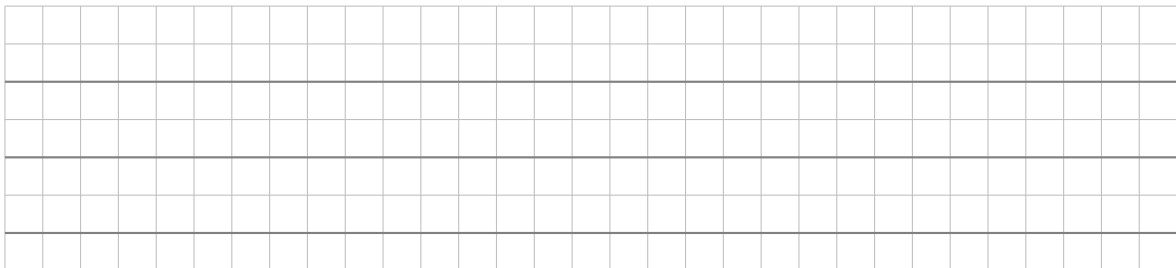
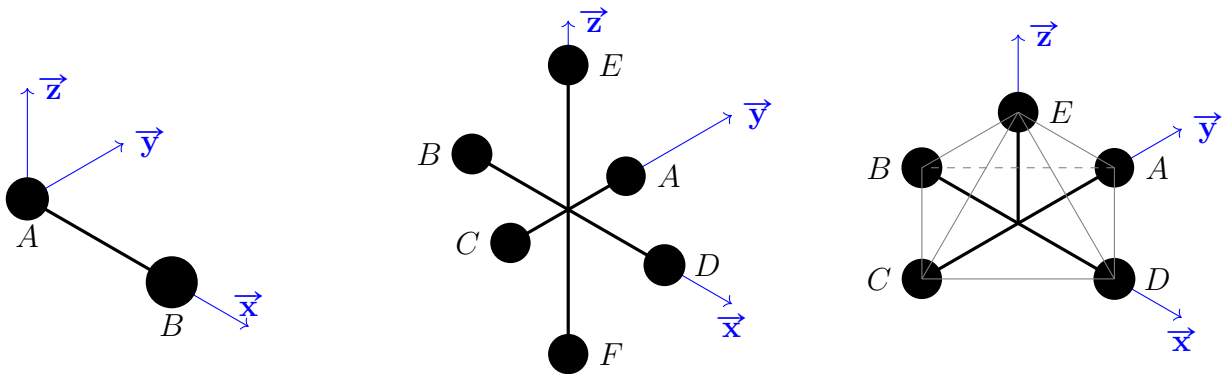
**Propriété 1** : Somme des vecteurs pondérés autour de  $G$  est nulle

$$\sum m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Cela signifie que les masses sont « équilibrées » autour de  $G$  dans toutes les directions.

**Propriété 2** : Le centre d'inertie de  $\Sigma$  se situe nécessairement sur tout élément géométrique invariant par symétries (point, axe ou plan).

### Exemples



### Expression de la quantité de mouvement

**Quantité de mouvement de  $\Sigma$**  : est le vecteur qui mesure son inertie de translation et qui s'obtient en multipliant la masse totale de  $\Sigma$  par la vitesse de son centre d'inertie  $G$

$$\vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_s) = m_\Sigma \vec{V}(G/\mathcal{R}_g)$$

**Démonstration** : En utilisant la formule de Varignon pour relier la vitesse des points  $M_i$  à celle de  $G$ , on obtient

$$\begin{aligned} \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_s) &= \sum m_i \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_g) \\ &= \sum m_i \left( \vec{V}(G/\mathcal{R}_g) + \overline{\mathbf{M}_i\mathbf{G}} \wedge \overline{\boldsymbol{\Omega}}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right) \\ &= m_\Sigma \vec{V}(G/\mathcal{R}_g) + \overline{\boldsymbol{\Omega}}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \wedge \left( \sum m_i \overline{\mathbf{G}\mathbf{M}_i} \right) \\ &= m_\Sigma \vec{V}(G/\mathcal{R}_g) \end{aligned} \quad (\text{CQFD})$$

### Moment cinétique

Le moment cinétique de  $\Sigma$  en  $O_\Sigma$ ,  $\vec{\sigma}(O_\Sigma; \Sigma/\mathcal{R}_g)$  est le vecteur qui mesure son inertie de rotation en combinant sa vitesse de rotation et la répartition de sa masse autour du point considéré.

### Tenseur d'inertie

Pour mesurer la répartition des masses de  $\Sigma$  autour d'un point  $A$  quelconque, on utilise le tenseur d'inertie  $\mathbb{I}[A; \Sigma]$ .

**Tenseur d'inertie  $\mathbb{I}[A; \Sigma]$**  :

$$\mathbb{I}[A; \Sigma] = m_\Sigma \sum \frac{m_i}{m_\Sigma} \left[ \left\| \overline{\mathbf{A}\mathbf{M}_i} \right\|^2 \mathbb{I}_d - \overline{\mathbf{A}\mathbf{M}_i} \otimes \overline{\mathbf{A}\mathbf{M}_i} \right]$$

où  $\mathbb{I}_d$  désigne l'opérateur identité ( $\mathbb{I}_d \cdot \vec{u} = \vec{u}$ ) et  $\otimes$  désigne le produit tensoriel ( $(\vec{a} \otimes \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}$ ).

**Remarque 7.3** On constate que les tenseur d'inertie est proportionnel à la masse de  $\Sigma$  et à la moyenne pondérée des coordonnées des vecteurs  $\overline{\mathbf{A}\mathbf{M}_i}$ . Il a donc pour unité le  $\text{kg.m}^2$ .

**Forme matricielle du tenseur d'inertie :** Le tenseur d'inertie  $\mathbb{I}[O_\Sigma; \Sigma]$  peut s'écrire sous la forme d'une matrice dans une base donnée qui sera toujours choisie liée à  $\Sigma$ .

Il a pour expression dans le base locale  $\mathcal{B}_\Sigma(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  à l'origine du repère  $O_\Sigma$

$$\mathbb{I}[O_\Sigma; \Sigma] = \begin{bmatrix} \sum m_i(Y_i^2 + Z_i^2) & \sum -m_i X_i Y_i & \sum -m_i X_i Z_i \\ \sum -m_i X_i Y_i & \sum m_i(X_i^2 + Z_i^2) & \sum -m_i Y_i Z_i \\ \sum -m_i X_i Z_i & \sum -m_i Y_i Z_i & \sum m_i(X_i^2 + Y_i^2) \end{bmatrix} (\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}).$$

avec  $\overline{O_\Sigma \mathbf{M}} = X_i \vec{\mathbf{i}} + Y_i \vec{\mathbf{j}} + Z_i \vec{\mathbf{k}}$ .

**Remarque 7.4** *Le tenseur d'inertie varie avec le point  $A$  où on l'exprime. En effet pour déterminer  $\mathbb{I}[A; \Sigma]$ , il faut remplacer les  $X_i$ ,  $Y_i$  et  $Z_i$  par les coordonnées du vecteur  $\overline{A \mathbf{M}_i} = X_i^{(A)} \vec{\mathbf{i}} + Y_i^{(A)} \vec{\mathbf{j}} + Z_i^{(A)} \vec{\mathbf{k}}$  dans le repère locale.*

**Propriété 1 - Existence d'une base propre :** le tenseur d'inertie  $\mathbb{I}[A; \Sigma]$  est symétrique par définition, il admet donc toujours une base orthonormée  $\mathcal{B}_\Sigma^*(\vec{\mathbf{x}}_\Sigma, \vec{\mathbf{y}}_\Sigma, \vec{\mathbf{z}}_\Sigma)$  dans laquelle il est diagonalisable, d'après le théorème spectral.

$$\mathbb{I}[A; \Sigma] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} (\vec{\mathbf{x}}_\Sigma, \vec{\mathbf{y}}_\Sigma, \vec{\mathbf{z}}_\Sigma).$$

Les vecteurs  $\vec{\mathbf{x}}_\Sigma, \vec{\mathbf{y}}_\Sigma, \vec{\mathbf{z}}_\Sigma$  de cette base sont appelés **axes principaux d'inertie** au point  $A$ , et les valeurs propres associées  $I_1, I_2$  et  $I_3$  sont les **moments principaux d'inertie**.

**Propriété 2 - Formule de Huygens-Steiner :** Soit  $G$  le centre d'inertie de  $\Sigma$  et  $A$  un point quelconque alors

$$\mathbb{I}[A; \Sigma] = \mathbb{I}[G; \Sigma] + m_\Sigma \begin{bmatrix} (Y_A^2 + Z_A^2) & -X_A Y_A & -X_A Z_A \\ -X_A Y_A & (X_A^2 + Z_A^2) & -Y_A Z_A \\ -X_A Z_A & -Y_A Z_A & (X_A^2 + Y_A^2) \end{bmatrix} (\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}).$$

où  $X_A, Y_A$  et  $Z_A$  sont les coordonnées du vecteurs  $\overline{A \mathbf{G}} = X_A \vec{\mathbf{i}} + Y_A \vec{\mathbf{j}} + Z_A \vec{\mathbf{k}}$  dans la base  $\mathcal{B}_\Sigma(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  liée à  $\Sigma$ .

La conséquence physique de ce théorème est que pour tout axe parallèle, le moment d'inertie est minimal lorsqu'il passe par le centre d'inertie  $G$ . Autrement dit, plus l'axe de rotation est éloigné de  $G$ , plus il est difficile de mettre en rotation  $\Sigma$ .

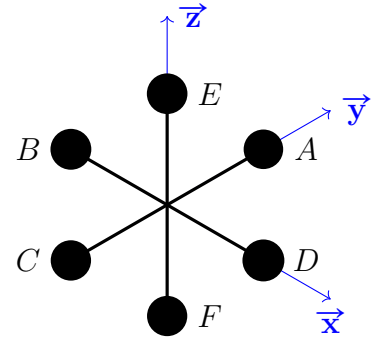
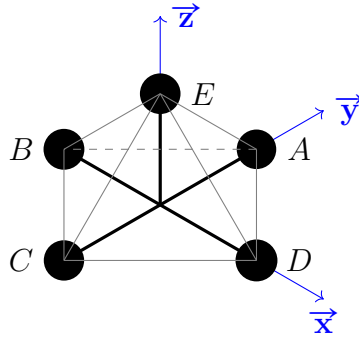
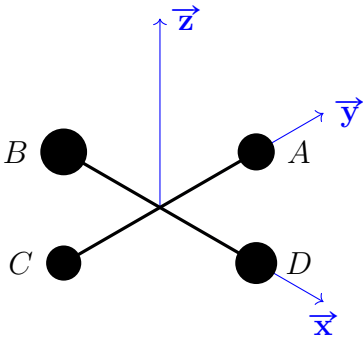
**Effet des symétries** La présence de symétries de répartition des masses impose des contraintes fortes sur la forme de le tenseur d'inertie :

- Si  $\Sigma$  possède un **plan de symétrie** passant par  $A$ , alors la normale au plan est un axe propre de  $\mathbb{I}[A; \Sigma]$ .
- Si  $\Sigma$  possède un **axe de symétrie de révolution** passant par  $A$ , alors cet axe est automatiquement un axe principal d'inertie de  $\mathbb{I}[A; \Sigma]$ , et les deux moments principaux dans le plan perpendiculaire sont égaux.

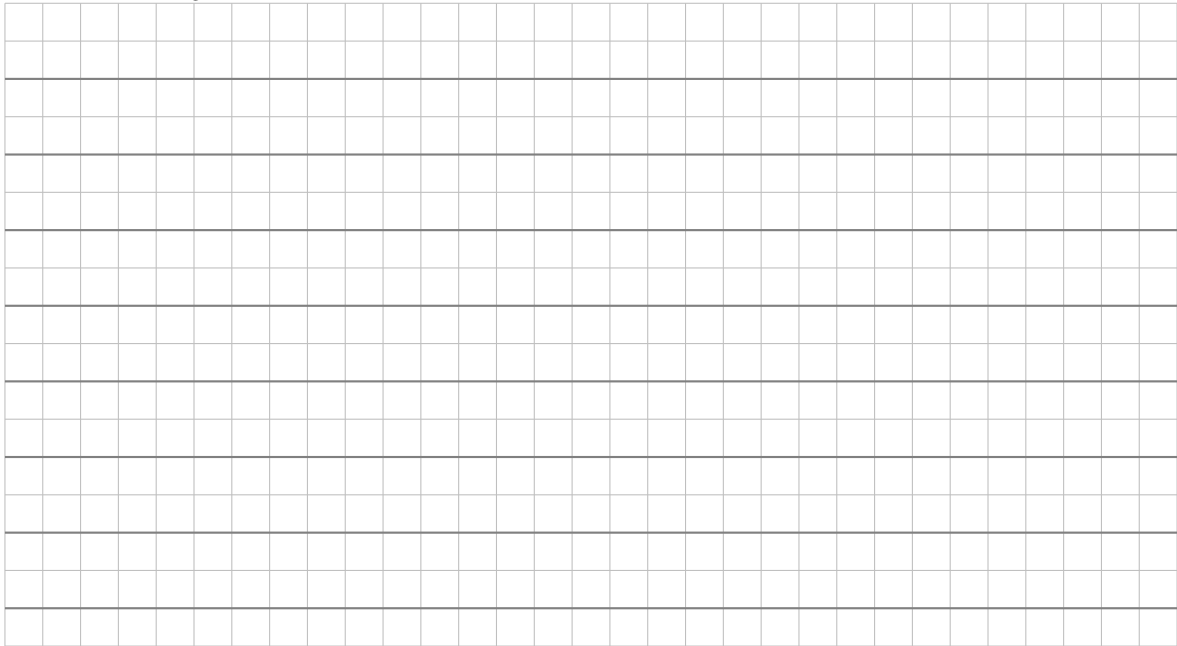
— Si  $\Sigma$  possède un **centre de symétrie** en  $G$ , alors  $\mathbb{I}[G; \Sigma] = I \mathbf{I}_d$ .

Les symétries permettent ainsi de déterminer les axes principaux d'inertie sans calcul, à partir de considérations purement géométriques.

**Exemples :**



$$m_A \neq m_B \neq m_C \neq m_D$$



**Remarque 7.5** Ainsi, le tenseur d'inertie reflète à la fois la structure propre de  $\Sigma$  (axes et moments principaux), la géométrie de ses symétries et le choix du point de réduction  $A$ .

Il sera toujours commode pour les calculs d'utiliser le centre d'inertie  $G$  comme point de réduction et une base formée par les axes principaux pour écrire le tenseur d'inertie sous forme diagonale.

**Exemples**



### Expression du moment cinétique au point $A$

**Moment cinétique au point  $A$  de  $\Sigma$  :** est le vecteur qui mesure l'inertie de rotation de  $\Sigma$  au point  $A$  et qui s'obtient par

$$\vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_s) = \mathbb{I}[A; \Sigma] \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) + m_\Sigma \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_g)$$

**Démonstration :** Pour déterminer cette expression du moment cinétique, on utilise encore la formule de Varignon

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_s) &= \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_g) \\ &= \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \left( \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) + \overrightarrow{M_iA} \wedge \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right) \\ &= \left[ \sum m_i \overrightarrow{AM_i} \right] \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) + \sum m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \left( \overrightarrow{M_iA} \wedge \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right) \\ &= \left[ \sum m_i \left( \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_i} \right) \right] \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) + \sum m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \left( \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \wedge \overrightarrow{AM_i} \right) \\ &= \left[ \sum m_i \right] \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) + \left[ \sum m_i \overrightarrow{GM_i} \right] \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) + \dots \\ &\quad \dots + \sum m_i \left[ \left( \overrightarrow{AM_i} \cdot \overrightarrow{AM_i} \right) \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) - \overrightarrow{AM_i} \left( \overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right) \right] \\ &= m_\Sigma \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) + \sum m_i \left[ \left\| \overrightarrow{AM_i} \right\|^2 \mathbb{I}_d - \overrightarrow{AM_i} \otimes \overrightarrow{AM_i} \right] \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \\ &= m_\Sigma \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) + \mathbb{I}[A; \Sigma] \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \quad (\text{CQFD}) \end{aligned}$$

**Remarque 7.6** *Le moment cinétique joue un rôle central en chimie quantique, car il structure directement l'organisation électronique des atomes et donc leurs propriétés chimiques. D'une part, le moment cinétique orbital — associé au mouvement des électrons autour du noyau — quantifie la forme des orbitales atomiques à travers le nombre quantique azimutal  $l$ , qui distingue par exemple les orbitales  $s$ ,  $p$ ,  $d$  et  $f$ . Ces orbitales ne sont rien d'autre que la quantification du moment cinétique orbital des électrons. D'autre part, chaque électron possède un moment cinétique intrinsèque, le spin, caractérisé par le nombre quantique  $s = 1/2$  et sa projection  $m_s = \pm 1/2$ . L'interaction entre ces deux moments, appelée couplage spin-orbite, influence finement l'énergie des niveaux électroniques et joue un rôle crucial dans des phénomènes tels que la structure fine des spectres atomiques, la réactivité spin-sélective, ou encore les propriétés magnétiques des molécules. Ainsi, la compréhension des différents types de moments cinétiques — orbital, spin, et leur couplage — est indispensable pour interpréter la structure électronique et prévoir la réactivité chimique.*

### Vision géométrique

La géométrie affine fournit le cadre mathématique naturel pour décrire la répartition d'un ensemble de points matériels dans l'espace. Dans ce cadre, les **moments barycentriques** d'ordre 0, 1 et 2 sont les outils privilégiés pour résumer, sous forme compacte, la façon dont des points matériels sont distribués.

**Moments barycentriques : ordre 0, 1 et 2**

Considérons un ensemble de points  $M_i$  de l'espace, pondérés par des scalaires  $w_i$  (masses, charges électrique). On introduit :

— le **moment d'ordre 0** :

$$W = \sum_i w_i,$$

— le **moment d'ordre 1** :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{W} \sum_i w_i \overrightarrow{OM}_i,$$

— le **moment d'ordre 2** :

$$M_2 = \sum_i w_i \overrightarrow{GM}_i \otimes \overrightarrow{GM}_i.$$

Le point  $G$  résume la position “moyenne” de la distribution, tandis que  $M_2$  décrit sa *dispersion* et son *anisotropie* autour de ce point.

Ainsi, les moments barycentriques, issus de la géométrie affine, constituent un langage commun permettant de décrire la répartition de particules dans de nombreux domaines : mécanique du solide (centre d'inertie, opérateur d'inertie), électrostatique (dipôle, quadrupôle), résistance des matériaux (moments quadratiques de section) ou encore physique des polymères (matrice de gyration). Ils offrent une description unifiée de la position moyenne et de la dispersion spatiale d'un ensemble de points pondérés.

Ordre	Mécanique	Électrostatique	Interprétation
0	Masse totale $m_T = \sum m_i$	Charge totale $Q = \sum q_i$	Quantité totale
1	Centre d'inertie $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_T} \sum m_i \overrightarrow{OM}_i$	Centre de charge ( $Q \neq 0$ ) $\overrightarrow{OG}_e = \frac{1}{Q} \sum q_i \overrightarrow{OM}_i$ Moment dipolaire ( $Q = 0$ ) $\vec{p} = \sum q_i \overrightarrow{OM}_i$	Position moyenne  Orientation
2	Tenseur d'inertie $\mathbb{I}[G, \Sigma]$	Tenseur quadrupolaire $\mathbb{Q}$	Dispersion et anisotropie

**En bref :** La cinétique est l'étude de la répartition des masses dans le but de calculer de la quantité de mouvement  $\vec{\mathbf{p}}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$  et le moment cinétique  $\vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g)$ . Elle commence toujours par l'analyse des symétries du système.

De plus, il sera le plus souvent commode de choisir le repère inertiel de  $\Sigma$ ,  $\mathcal{R}_\Sigma^*(G; \vec{\mathbf{x}}_\Sigma, \vec{\mathbf{y}}_\Sigma, \vec{\mathbf{z}}_\Sigma)$  comme repère locale car

$$\mathbb{I}[G; \Sigma] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} (\vec{\mathbf{x}}_\Sigma, \vec{\mathbf{y}}_\Sigma, \vec{\mathbf{z}}_\Sigma)$$

et

$$\vec{\sigma}(G; \Sigma/\mathcal{R}_s) = \mathbb{I}[G; \Sigma] \cdot \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\Sigma/\mathcal{R}_g) = I_x \omega_x \vec{\mathbf{x}}_\Sigma + I_y \omega_y \vec{\mathbf{y}}_\Sigma + I_z \omega_z \vec{\mathbf{z}}_\Sigma$$

où  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont les composantes de  $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \omega_x \vec{\mathbf{x}}_\Sigma + \omega_y \vec{\mathbf{y}}_\Sigma + \omega_z \vec{\mathbf{z}}_\Sigma$  dans la base inertielle.

L'expression de l'énergie cinétique met explicitement en évidence le découplage entre translation et rotation.

$$T(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} (m_\Sigma V_x^2 + m_\Sigma V_y^2 + m_\Sigma V_z^2) + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

$$\text{où } \vec{\mathbf{V}}(G/\mathcal{R}_g) = V_x \vec{\mathbf{x}}_\Sigma + V_y \vec{\mathbf{y}}_\Sigma + V_z \vec{\mathbf{z}}_\Sigma$$

## 7.5 Dynamique

Pour déterminer la dynamique de  $\Sigma$ , on calcule la dérivée de la quantité de mouvement et du moment cinétique par rapport au référentiel galiléen. Pour obtenir les deux théorèmes fondamentaux de la dynamique.

**Théorème de la résultante dynamique :**

$$\vec{\mathbf{R}}_d(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathbf{F}}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

où la résultante dynamique est définie par

$$\vec{\mathbf{R}}_d(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{\mathbf{p}}(\Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g}$$

**Théorème du moment dynamique au point  $A$  :**

$$\vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathbf{M}}(A; \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

où le moment dynamique en  $A$  est défini par

$$\vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} + \vec{\mathbf{V}}(A/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{\mathbf{p}}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$$

**Démonstration du théorème de la résultante dynamique** Pour obtenir ce théorème, on calcule la dérivée temporelle de la quantité de mouvement :

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{p}}(\Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum \left. \frac{d\vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g}.$$

Ensuite, on applique le PDF sur chaque point  $M_i$ , on obtient le théorème de la résultante dynamique  $\vec{\mathbf{R}}_d(\Sigma/\mathcal{R}_g)$  :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}}_d(\Sigma/\mathcal{R}_g) &= \left. \frac{d\vec{\mathbf{p}}(\Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \sum \left. \frac{d\vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \sum \vec{\mathbf{F}}(\Sigma \rightarrow M_i) + \sum \vec{\mathbf{F}}(\bar{\Sigma} \rightarrow M_i) \\ &= \vec{\mathbf{F}}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \end{aligned}$$

où  $\vec{\mathbf{F}}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \sum \vec{\mathbf{F}}(\bar{\Sigma} \rightarrow M_i)$  est la somme des forces extérieures à  $\Sigma$  et la somme de force intérieures à  $\Sigma$  est nulle ( $\sum \vec{\mathbf{F}}(\Sigma \rightarrow M_i) = \vec{\mathbf{0}}$ ).

En effet, le théorème des actions réciproques implique

$$\vec{\mathbf{F}}(M_i \rightarrow M_j) = -\vec{\mathbf{F}}(M_j \rightarrow M_i)$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{\mathbf{F}}(\Sigma \rightarrow M_i) &= \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{F}}(M_j \rightarrow M_i) \\ &= \sum_i \sum_{j > i} \left( \vec{\mathbf{F}}(M_j \rightarrow M_i) + \vec{\mathbf{F}}(M_i \rightarrow M_j) \right) \\ &= \vec{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème de la résultante dynamique (**CQFD**).

**Démonstration du théorème du moment dynamique** De la même manière, la démonstration repose sur le calcul de la dérivée du moment cinétique par rapport au référentiel galiléen :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} &= \sum \left. \frac{d\overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \sum \left. \frac{d\overline{\mathbf{AM}}_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g) + \sum \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \left. \frac{d\vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \sum \left[ \vec{\mathbf{V}}(M_i/\mathcal{R}_g) - \vec{\mathbf{V}}(A/\mathcal{R}_g) \right] \wedge \vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g) + \sum \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \left. \frac{d\vec{\mathbf{p}}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \end{aligned}$$

or  $\vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) = m_i \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_g)$  donc  $\vec{V}(M_i/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} &= -\vec{V}(A/\mathcal{R}_g) \wedge \sum \vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g) + \sum \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \left. \frac{d\vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= -\vec{V}(A/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g) + \sum \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \left. \frac{d\vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \end{aligned}$$

Ensuite, on introduit le moment dynamique en  $A$

$$\vec{\delta}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} + \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$$

et on applique le PFD pour chaque point  $M_i$ , on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) &= \sum \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \left. \frac{d\vec{p}(M_i/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \sum \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(\Sigma \rightarrow M_i) + \sum \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow M_i) \\ &= \sum \vec{M}(A; \bar{\Sigma} \rightarrow M_i) + \sum \vec{M}(A; \Sigma \rightarrow M_i) \end{aligned}$$

où  $\vec{M}(A; \bar{\Sigma} \rightarrow M_i) = \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow M_i)$  est le moment en  $A$  des forces extérieures sur  $M_i$  et  $\vec{M}(A; \Sigma \rightarrow M_i)$  le moment en  $A$  des forces intérieures sur  $M_i$  qui a pour expression

$$\begin{aligned} \vec{M}(A; \Sigma \rightarrow M_i) &= \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow M_i) \\ &= \sum_{j \neq i} \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(M_j \rightarrow M_i) \\ &= \sum_{j \neq i} -\overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(M_i \rightarrow M_j) \end{aligned}$$

la somme des moments  $A$  des forces intérieures s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{M}(A; \Sigma \rightarrow M_i) &= \sum_i \sum_{j > i} \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(M_j \rightarrow M_i) + \sum_i \sum_{j < i} -\overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(M_i \rightarrow M_j) \\ &= \sum_i \sum_{j > i} \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(M_j \rightarrow M_i) + \sum_j \sum_{i > j} -\overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(M_i \rightarrow M_j) \\ &= \sum_i \sum_{j > i} \overline{\mathbf{AM}}_i \wedge \vec{F}(M_j \rightarrow M_i) + \sum_i \sum_{j > i} -\overline{\mathbf{AM}}_j \wedge \vec{F}(M_j \rightarrow M_i) \\ &= \sum_i \sum_{j > i} (\overline{\mathbf{AM}}_i - \overline{\mathbf{AM}}_j) \wedge \vec{F}(M_j \rightarrow M_i) \\ &= \sum_i \sum_{j > i} \overline{\mathbf{M}_j \mathbf{M}_i} \wedge \vec{F}(M_j \rightarrow M_i) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un système de points indéformables  $\Sigma$  pour garantir la norme des vecteurs  $\|\overline{\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j}\|$  est constante  $\forall i, j$ , on introduit des multiplicateurs de Lagrange  $F_{ij}$  tel que les forces entre deux points  $M_i$  et  $M_j$  s'écrivent

$$\vec{F}(M_i \rightarrow M_j) = F_{ij} \frac{\overline{\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j}}{\|\overline{\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j}\|}$$

Ceci implique directement que la somme des moments intérieurs en  $A$  est nulle

$$\sum_i \vec{M}(A; \Sigma \rightarrow M_i) = \sum_i \sum_{j>i} \vec{M}_j \vec{M}_i \wedge \vec{F}(M_j \rightarrow M_i) = \vec{0}$$

Il en découle directement le théorème du moment dynamique en  $A$

$$\vec{\delta}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) = \vec{M}(A; \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

où  $\vec{M}(A; \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \sum \vec{M}(A; \bar{\Sigma} \rightarrow M_i)$  est la somme des moments en  $A$  des forces extérieures à  $\Sigma$  (CQFD).

### Expression du PFD au centre d'inertie

Encore une fois, il va être commode d'exprimer le moment dynamique au centre d'inertie  $G$ .

**Théorème de la résultante dynamique**  
ou **Conservation de la quantité de mouvement**

$$\vec{R}_d(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

**Théorème du moment dynamique au centre d'inertie  $G$  :**  
ou **Conservation du moment cinétique**

$$\vec{\delta}(G; \Sigma/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G; \Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{M}(G; \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

Dans le cas où la masse des points matériels est constante, ces équations peuvent se mettre sous la forme des équations Euler-Newton

**Théorème de la résultante dynamique (Équation de Newton)**

$$m_\Sigma \vec{a}(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

**Théorème du moment dynamique au point  $G$  (Équation d'Euler)**

$$\mathbb{I}[G; \Sigma] \cdot \vec{\alpha}(\Sigma/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \wedge \left( \mathbb{I}[G; \Sigma] \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right) = \vec{M}(G; \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

où  $\vec{\alpha}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$  est le vecteur accélération angulaire de  $\Sigma$  par rapport à  $\mathcal{R}_g$  :

$$\vec{\alpha}(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_\Sigma} = \left. \frac{d\vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g}$$

**Remarque 7.7** *Le moment dynamique de  $\Sigma$  autour d'un point  $A$  quelconque peut s'écrire également sous une forme similaire*

$$\vec{\delta}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) = \mathbb{I}[A; \Sigma] \cdot \vec{\alpha}(\Sigma/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \wedge \left( \mathbb{I}[A; \Sigma] \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right) + \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g).$$

- **Le terme  $\mathbb{I}[A; \Sigma] \cdot \vec{\alpha}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$  représente l'inertie à la mise en rotation de  $\Sigma$  :** c'est la contribution due à la variation du taux de rotation, analogue au produit  $m_\Sigma \vec{a}(G/\mathcal{R}_g)$  en translation.
- **Le terme  $\vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \wedge \left( \mathbb{I}[A; \Sigma] \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_g) \right)$  traduit l'effet gyroscopique :** il est dû au changement de direction du moment cinétique lorsque le solide tourne déjà. C'est l'effet de précession ou de déviation caractéristique des corps en rotation.
- **Le terme  $\vec{V}(A/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g)$  représente l'effet de transport du moment cinétique.** Il traduit le fait que, lorsque le point  $A$  est mobile dans le référentiel galiléen, il "emporte" avec lui la quantité de mouvement totale de  $\Sigma$ . Ce terme mesure l'influence de la translation du repère centré en  $A$  sur la variation du moment cinétique : plus  $A$  se déplace vite, plus le moment dynamique observé depuis ce point contient une contribution liée à la translation du système tout entier.

## DYNAMIQUE DES SOLIDES INDÉFORMABLES

### 4.1 Principe Fondamentale de la Dynamique

#### 4.1.1 Énoncé du Principe Fondamentale de la Dynamique

Dans le cadre la dynamique des solides indéformables, le PFD appliqué à un solide  $S$  en mouvement dans un référentiel galiléen se décompose en deux égalités.

**Théorème de la résultante dynamique ou Conservation de la quantité de mouvement**

$$\vec{\mathbf{R}}_d(S/\mathcal{R}_g) = \sum \vec{\mathbf{F}}(\text{ext} \rightarrow S)$$

où  $\vec{\mathbf{R}}_d(S/\mathcal{R}_g)$  la résultante dynamique est égale à la somme des forces extérieures au solide  $S$

**Théorème du moment dynamique  $A$  ou Conservation du moment cinétique en  $A$**

$$\vec{\delta}(A; S/\mathcal{R}_g) = \sum \vec{\mathbf{M}}(A; \text{ext} \rightarrow S)$$

où  $\vec{\delta}(A; S/\mathcal{R}_g)$  le moment dynamique du solide  $S$  au point  $A$  est également à la somme des moments des actions mécaniques extérieures à  $S$ .

#### 4.1.2 Formulation d'un problème de dynamique du solide

1. On isole un ou plusieurs solides
2. BAME
3. Calcule de la résultante dynamique et du moment dynamique (Cinétique)
4. PFD
5. Projection des 2 equations vectorielles

### 4.1.3 Rappel sur les actions mécaniques

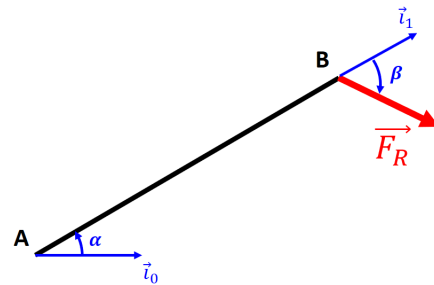
En mécanique du solide indéformable une action mécanique  $\mathcal{A}$  sur le solide  $S_1$  est modélisée en un point  $O$  de l'espace par un vecteur force  $\vec{F}(\mathcal{A} \rightarrow 1)$  et un vecteur moment  $\vec{M}(O; \mathcal{A} \rightarrow 1)$  exprimé au point  $O$ .

#### Calcul du moment d'une force

Le moment en  $O$  d'une force  $\vec{F}$  passant par le point  $A$  est défini par

$$\vec{M}(O; \vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

**Exemple : Examen de 2024** On note  $\vec{F}_r = F_r \vec{i}_2$  la force du requin sur la canne à pêche.



$$\vec{AB} = L \vec{i}_1$$

$$\vec{F}_R = F_R \vec{i}_2$$



#### Action de pesanteur

L'action de la pesanteur sur un solide  $S_1$  de masse  $m_1$  est une force  $\vec{P} = m_1 \vec{g}$  passant par le centre de gravité  $G$  du solide.

Le torseur d'action mécanique associé est

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{pesanteur} \\ \rightarrow 1 \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

### Actions mécaniques des actionneurs

Dans un mécanisme on rencontre généralement deux types :

**Actionneurs linéaires** : les vérins et les moteurs linéaires, modéliser par une force  $\vec{F} = F\vec{x}_1$  sur l'axe d'actionneur  $(A, \vec{x}_1)$  :

$${}_A \left\{ Verin \rightarrow S \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} F\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Actionneurs rotatifs** : les moteurs, modélisés par un couple  $C_m$  suivant l'axe  $\vec{z}_1$  du moteur :

$$- \left\{ Moteur \rightarrow S \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_1 \end{array} \right\}$$

### Actions de liaison

L'action mécanique d'une liaison cinématique entre  $S_1$  et  $S_2$  est définie à l'aide des multiplicateurs de Lagrange nécessaire pour bloquer les ddl bloqués par la liaison. Elle est définie par le torseur d'inter-effort de la liaison

$$\left\{ 2 \rightarrow 1 \right\}$$

### Théorèmes des actions réciproques

**Théorèmes des actions réciproques** : Soient deux solides  $S_1$  et  $S_2$  alors

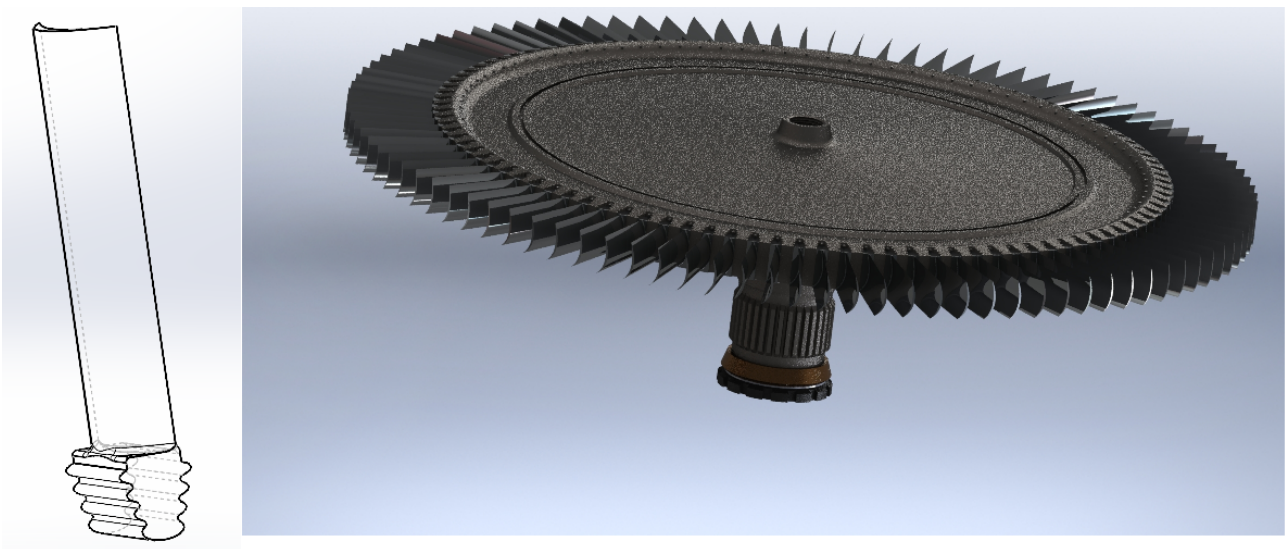
$$\begin{aligned} \vec{F}(1 \rightarrow 2) &= -\vec{F}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A; 1 \rightarrow 2) &= -\vec{M}(A; 2 \rightarrow 1) \end{aligned}$$

### Demonstration





## 4.2 Cinétique



La cinétique des solides indéformables étudie la répartition de la masse au sein d'un solide  $S$ .

Elle s'appuie sur les mêmes concepts que l'étude d'un ensemble discret de points matériels : la masse totale, le centre d'inertie  $G$  et le tenseur d'inertie  $\mathbb{I}[G; S]$ .

Le passage du cas discret au cas continu se fait en découpant le solide  $S$  en éléments de volume  $dV$  de masse  $dm = \rho dV$ , puis en remplaçant la somme sur les points matériels par une intégrale de volume :

$$\sum_{i=1}^N m_i(\bullet) \longrightarrow \int_S (\bullet) \rho dV,$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique au point  $M \in S$ .

### 4.2.1 Moments inertiels d'un solide

**Moment d'ordre 0 : masse totale**

Masse du solide  $S$ ,  $m_S$  :

$$m_S = \int_S \rho dV.$$

**Moment d'ordre 1 : centre d'inertie**

**Centre d'inertie  $G$**  : est le barycentre des points matériels pondérés par leurs masses

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_S} \int_S \overrightarrow{OM} \rho dV, \quad \forall O.$$

**Moment d'ordre 2 : tenseur d'inertie**

**Opérateur d'inertie  $\mathbb{I}[A; S]$  :**

$$\mathbb{I}[A; S] = \int_S \left[ \|\overrightarrow{AM_i}\|^2 \mathbb{I}_d - \overrightarrow{AM_i} \otimes \overrightarrow{AM_i} \right] \rho dV$$

où  $\mathbb{I}_d$  désigne l'opérateur identité ( $\mathbb{I}_d \cdot \vec{u} = \vec{u}$ ) et  $\otimes$  désigne le produit tensoriel ( $(\vec{a} \otimes \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$ ).

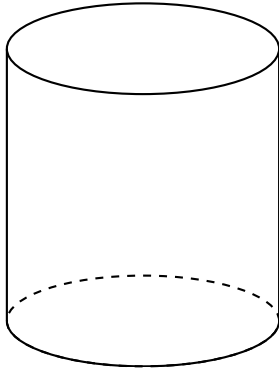
**Forme matricielle de l'opérateur d'inertie** : L'opérateur d'inertie  $\mathbb{I}[A; S]$  peut s'écrire sous la forme d'une matrice dans une base locale liée à  $S$ .

Il a pour expression dans le base locale  $\mathcal{B}_S(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

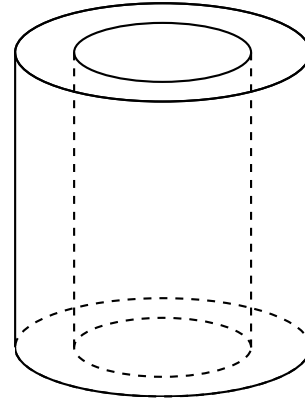
$$\mathbb{I}[A; S] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) \rho dV & - \int_S xy \rho dV & - \int_S xz \rho dV \\ - \int_S xy \rho dV & \int_S (x^2 + z^2) \rho dV & - \int_S yz \rho dV \\ - \int_S xz \rho dV & - \int_S yz \rho dV & \int_S (x^2 + y^2) \rho dV \end{bmatrix} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

avec  $\overrightarrow{AM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ .

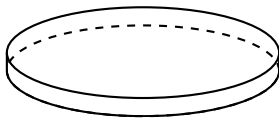
## Exemples de formes élémentaires



$$\mathbb{I}[G; 1] = m_1 \begin{bmatrix} \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_1)}$$



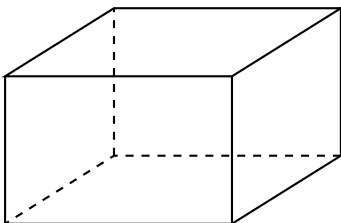
$$\mathbb{I}[G; 2] = m_2 \begin{bmatrix} \frac{R_e^2 + R_i^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_e^2 + R_i^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_e^2 + R_i^2}{2} \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_2)}$$



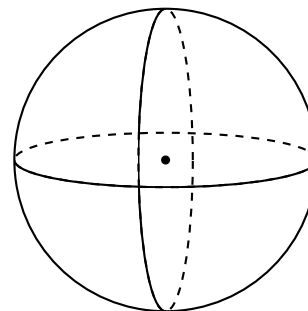
$$\mathbb{I}[G; 3] = m_3 \begin{bmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_3)}$$



$$\mathbb{I}[G; 4] = m_4 \begin{bmatrix} \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_4)}$$



$$\mathbb{I}[G; 5] = m_5 \begin{bmatrix} \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c^2 + a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$



$$\mathbb{I}[G; 6] = m_6 \begin{bmatrix} \frac{2R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R^2}{5} \end{bmatrix}_{(-, -, -)}$$

### Calcul numérique des moments dans les logiciels de CAO (Hors programme)

Les logiciels de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) tels que CATIA, SolidWorks, NX, Inventor ou FreeCAD peuvent déterminer automatiquement les propriétés massiques d'un solide : masse, centre d'inertie et tenseur d'inertie. Ces grandeurs ne sont pas calculées en découpant le volume en petits éléments  $dV$ . Elles reposent sur une méthode plus efficace et plus précise : la transformation des intégrales de volume en intégrales de surface à partir de la représentation géométrique du solide.

**Représentation B-Rep et intégrales surfaciques** Les modélisateurs géométriques décrivent un solide par sa représentation frontière (*Boundary Representation* ou B-Rep) : une collection de faces, arêtes et sommets définissant exactement la géométrie du bord  $\partial S$ .

Le volume intérieur n'est jamais maillé : seule la frontière est connue analytiquement (plans, cylindres, NURBS, etc.). Les intégrales volumiques classiques,

$$\int_S (\bullet) dV,$$

sont transformées en intégrales de surface sur  $\partial S$  grâce au théorème de Gauss–Ostrogradsky :

$$\int_S \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} dV = \int_{\partial S} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS.$$

où  $\vec{\mathbf{n}}$  est la normale sortante à la frontière.

Les logiciels choisissent pour  $\vec{\mathbf{F}}$  des champs polynomiaux appropriés afin d'obtenir une expression fermée des grandeurs recherchées en fonction de la géométrie des faces.

**Exemple du calcul du volume** Le volume est obtenu par une formule surfacique directe. Tout d'abord, on découpe la surface du solide  $S$  en un ensemble de faces  $\mathcal{F}_i$ . Puis on choisit  $\vec{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\mathbf{O}_S \mathbf{M}}$  de telle sorte que  $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = 3$  Il en découle que :

$$V = \frac{1}{3} \sum_{\mathcal{F}_i} \int_{\mathcal{F}_i} (\overrightarrow{\mathbf{O}_S \mathbf{M}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) dS,$$

où  $\overrightarrow{\mathbf{O}_S \mathbf{M}}$  est la position d'un point  $M$  sur la face  $\mathcal{F}_i$  et  $\vec{\mathbf{n}}$  la normale extérieure en  $M$  à  $\mathcal{F}_i$ .

La position du centre d'inertie  $G$  et la matrice d'inertie sont également obtenues grâce à des intégrales de surface dérivées du théorème de divergence.

Cette approche ne nécessite aucun découpage interne du solide et présente plusieurs avantages essentiels :

- **Précision élevée** : aucune approximation volumique ou maillage interne n'est nécessaire.
- **Rapidité** : seules les faces sont intégrées, ce qui réduit fortement le coût de calcul.
- **Exactitude géométrique** : la CAO travaille sur la géométrie réelle (NURBS, surfaces analytiques).
- **Robustesse** : les formules sont indépendantes de la finesse d'un maillage.

### Effet des symétries

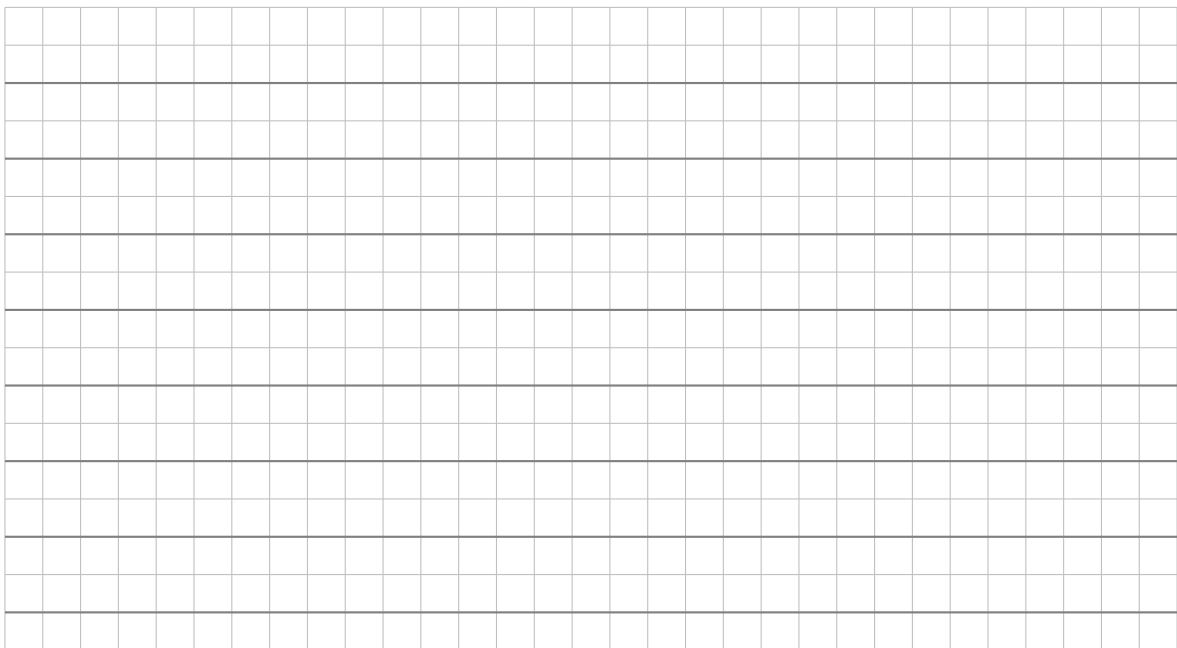
**Règle 1** Le centre d'inertie d'un solide se situe nécessairement sur tout élément géométrique invariant par symétries (point, axe ou plan).

**Règle 2** La présence de symétries géométriques du solide impose des contraintes fortes sur la forme de l'opérateur d'inertie :

- Si  $S$  possède un **plan de symétrie** passant par  $A$ , alors la normale au plan est un axe propre de  $\mathbb{I}[A; S]$ .
- Si  $S$  possède un **axe de symétrie de révolution** passant par  $A$ , alors cet axe est automatiquement un axe principal d'inertie de  $\mathbb{I}[A; S]$ , et les deux moments principaux dans le plan perpendiculaire sont égaux.
- Si  $S$  possède un **centre de symétrie** en  $G$ , alors  $\mathbb{I}[G; S] = I \mathbf{I}_d$ .

Les symétries permettent ainsi de déterminer les axes principaux d'inertie sans calcul intégral, à partir de considérations purement géométriques.

### Exemples



## 4.2.2 Grandeurs cinétiques

### Quantité de mouvement

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}_g) = m_s \vec{V}(G/\mathcal{R}_g)$$

### Moment cinétique

$$\vec{\sigma}(A; S/\mathcal{R}_g) = \mathbb{I}[A; S] \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) + m_s \overline{AG} \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}_g)$$

**Énergie cinétique**

$$T(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{p}(S/\mathcal{R}_g) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\sigma}(A; S/\mathcal{R}_g), \quad \forall A$$

**4.2.3 Grandeurs dynamiques****Résultante dynamique**

$$\vec{R}_d = \left. \frac{d\vec{p}(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = m_s \vec{a}(G/\mathcal{R}_g)$$

**Moment dynamique**

$$\vec{\delta}(A; S/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A; S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} + \vec{V}(A/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{p}(S/\mathcal{R}_g)$$

**4.2.4 Cas particuliers à absolument connaître****Calcul du moment au centre d'inertie  $G$** 

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(G; S/\mathcal{R}_g) &= \mathbb{I}[G; S] \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g), \\ \vec{\delta}(G; S/\mathcal{R}_g) &= \left. \frac{d\vec{\sigma}(G; S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \mathbb{I}[G; S] \cdot \vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \left( \mathbb{I}[G; S] \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \right) \end{aligned}$$

où  $\vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g)$  est l'accélération angulaire

$$\vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) = \left. \frac{d\vec{\Omega}(G; S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \left. \frac{d\vec{\Omega}(G; S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_S$$

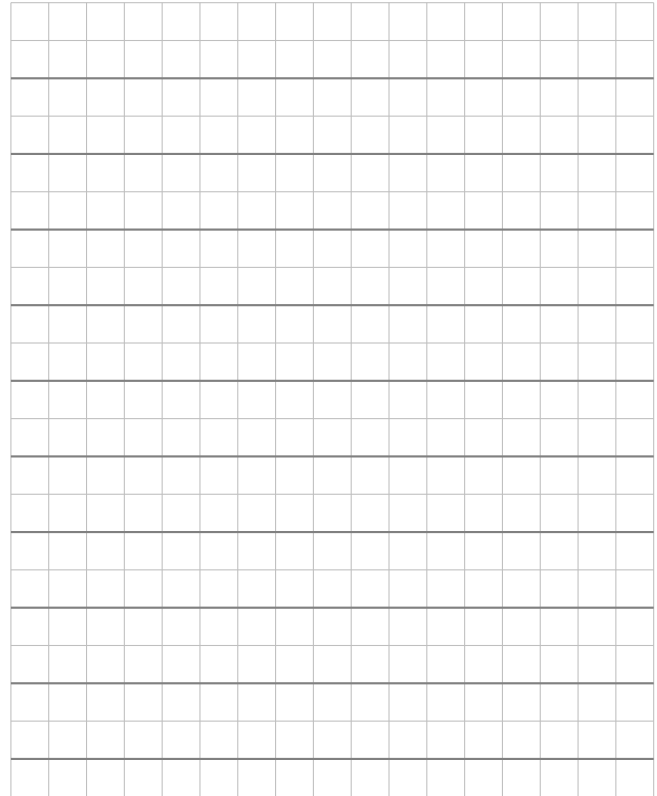
**Calcul du moment en un point  $O$  fixe dans  $\mathcal{R}_g$** 

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(O; S/\mathcal{R}_g) &= \mathbb{I}[O; S] \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g), \\ \vec{\delta}(O; S/\mathcal{R}_g) &= \left. \frac{d\vec{\sigma}(O; S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \mathbb{I}[O; S] \cdot \vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \left( \mathbb{I}[O; S] \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \right) \end{aligned}$$

Si le solide  $S$  tourne par rapport au référentiel galiléen autour de l'un de ces axes d'inertie  $\Delta$  de moment alors

$$\vec{\sigma}(O; S/\mathcal{R}_g) = I_\Delta \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g), \quad \vec{\delta}(O; S/\mathcal{R}_g) = I_\Delta \vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g)$$

## Exemple

4.2.5 Cas d'un système  $\Sigma$  constitué de  $N$  solides

Soit un système  $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$  constitué de  $N$  solides, les grandeurs cinétiques et dynamiques de  $\Sigma$  s'obtiennent en sommant les celles de chaque solide.

**Ensemble de solides  $\Sigma = \{S_i\}$**

$$\begin{aligned} \vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}_g) &= \sum_{i=1}^N \vec{p}(S_i/\mathcal{R}_g) & \vec{\sigma}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) &= \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}(A; S_i/\mathcal{R}_g) \\ \vec{R}_d(\Sigma/\mathcal{R}_g) &= \sum_{i=1}^N \vec{R}_d(S_i/\mathcal{R}_g) & \vec{\delta}(A; \Sigma/\mathcal{R}_g) &= \sum_{i=1}^N \vec{\delta}(A; S_i/\mathcal{R}_g) \end{aligned}$$

Il est important de noter que tous les moments doivent être exprimés au même point  $A$ .

Exemple



### 4.3 Le torseur en mécanique des solides indéformables

En mécanique du solide, un **torseur** est un objet mathématique qui regroupe, dans une même écriture, deux grandeurs vectorielles définies en tout point de l'espace et liées entre elles par une relation de transport, appelée également formule de Varignon.

Un torseur  $\{\mathcal{T}\}$  est constitué :

- d'un **vecteur résultant**  $\vec{\mathbf{R}}$ , indépendant du point de réduction ;
- d'un **moment**  $\vec{\mathbf{M}}(A)$  défini en un point  $A$  quelconque.

Ces deux objets sont liés par la formule de transport ou formule de Varignon :

$$\vec{\mathbf{M}}(B) = \vec{\mathbf{M}}(A) + \vec{\mathbf{AB}} \wedge \vec{\mathbf{R}},$$

qui exprime la manière dont le moment se transforme lorsque l'on change de point de réduction. Cette relation caractérise la structure d'un champs de vecteur affine  $\vec{\mathbf{M}}(P)$  de dimension trois, dirigée par le sous-espace vectoriel engendré par  $\vec{\mathbf{R}}$  via le produit vectoriel.

En d'autres termes, le champ de moments d'un torseur :

- tourne autour de la résultante
- croît linéairement avec la distance au point de réduction,
- forme un **faisceau de moments** autour d'une droite appelée ligne de glissement (là où le moment est minimal)
- Si  $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ , le champ devient constant (torseur couple).

Cette structure en fait un outil particulièrement adapté pour modéliser les grandeurs distribuées dans l'espace de la mécanique du solide indéformable :

**Action mécanique :**

$${}_A \left\{ 2 \rightarrow 1 \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{F}}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{\mathbf{M}}(A; 2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}$$

**Grandeurs cinématiques :**

$${}_A \left\{ \mathcal{V}(2/1) \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{\Omega}}(2/1) \\ \vec{\mathbf{V}}(A; 2/1) \end{array} \right\}$$

**Grandeurs cinétiques :**

$${}_A \left\{ \mathcal{C}(S/\mathcal{R}_g) \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{p}}(S/\mathcal{R}_g) \\ \vec{\sigma}(A; S/\mathcal{R}_g) \end{array} \right\}$$

**Grandeurs dynamiques :**

$${}_A \left\{ \mathcal{D}(S/\mathcal{R}_g) \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{R}}_d(S/\mathcal{R}_g) \\ \vec{\delta}(A; S/\mathcal{R}_g) \end{array} \right\}$$

### Opérations sur les torseurs

Soient deux torseurs exprimés au point  $A$

$$\left\{ \mathcal{T}_1 \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}}_1 \\ \vec{\mathbf{M}}_1(A) \end{array} \right\}, \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{T}_2 \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}}_2 \\ \vec{\mathbf{M}}_2(A) \end{array} \right\}$$

**Addition :**

$$\left\{ \mathcal{T}_1 \right\}_A + \left\{ \mathcal{T}_2 \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 \\ \vec{\mathbf{M}}_1(A) + \vec{\mathbf{M}}_2(A) \end{array} \right\}$$

Les deux torseurs doivent être exprimés au même point  $A$  pour être additionnés.

**Co-moment :**

$$\left\{ \mathcal{T}_1 \right\}_A \otimes \left\{ \mathcal{T}_2 \right\}_A = \vec{\mathbf{R}}_1 \cdot \vec{\mathbf{M}}_2(A) + \vec{\mathbf{R}}_2 \cdot \vec{\mathbf{M}}_1(A)$$

Les deux torseurs doivent être exprimés au même point  $A$  pour appliquer l'opération de co-moment de deux torseurs. Il est important de noter que le résultat est indépendant du point  $A$  choisi.

**Décomposition :** Tout torseur peut se décomposer comme un torseur couple et un glisseur

$$\left\{ \mathcal{T} \right\}_A = \left\{ \mathcal{C} \right\}_A + \left\{ \mathcal{G} \right\}_A$$

avec le torseur couple invariant par changement de point

$$\left\{ \mathcal{C} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{C}} \end{array} \right\}$$

où  $\vec{\mathbf{C}} = (\vec{\mathbf{M}}(A) \cdot \vec{\mathbf{n}}_R) \vec{\mathbf{n}}_R$  est la projecteur du moment suivant la direction de la résultante  $\vec{\mathbf{n}}_R = \vec{\mathbf{R}} / \|\vec{\mathbf{R}}\|$  et avec le torseur glisseur s'écrivant

$$\left\{ \mathcal{G} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{R}} \\ \vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{G}}(A) = \vec{\mathbf{M}}(A) - \vec{\mathbf{C}} \end{array} \right\}$$

Pour trouver l'axe du glisseur  $(B, \vec{\mathbf{n}}_R)$ , il suffit de trouver un point  $B$  tel que

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{G}}(B) = \vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{G}}(A) + \vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$

## 4.4 Théorème de l'énergie cinétique

### 4.4.1 Énoncé du théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Considérons un ensemble de solides  $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ .

Le théorème de l'énergie cinétique établit que la dérivée temporelle de l'énergie cinétique totale de  $\Sigma$  est égale à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures ( $\mathcal{P}^{ext}$ ) et intérieures ( $\mathcal{P}^{int}$ ) appliquées à l'ensemble.

$$\frac{dT(\Sigma/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{int}.$$

### 4.4.2 Utilisation du théorème du TEC

1. Isoler un ensemble de solides
2. Lister des actions mécaniques extérieures et intérieures (BAM)
3. Calculer les puissances  $\mathcal{P}^{ext}$  et  $\mathcal{P}^{int}$ .
4. Calculer de l'énergie cinétique  $T(\Sigma/\mathcal{R}_g)$
5. Appliquer le TEC

### 4.4.3 Calcul de l'énergie cinétique

Énergie cinétique d'un solide  $S$

$$T(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \left( \vec{\mathbf{p}}(S/\mathcal{R}_f) \cdot \vec{\mathbf{V}}(A; S/\mathcal{R}_g) + \vec{\sigma}(A; S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \right), \quad \forall A$$

Énergie cinétique d'un ensemble de solide  $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$

$$T(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^N T(S_i/\mathcal{R}_g)$$

**Remarque 4.1** Pour calculer l'énergie cinétique d'un solide, on peut choisir librement le point de réduction  $A$ , à condition que la vitesse et le moment cinétique soient tous deux exprimés en ce même point.

On peut également interpréter ce calcul comme la moitié du co-moment entre le torseur cinématique et le torseur cinétique du solide. Cette opération n'est toutefois valable que si les deux torseurs sont réduits au même point :

$$T(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g) \right\}_A \otimes \left\{ \mathcal{C}(S/\mathcal{R}_g) \right\}_A$$



**Puissance d'un vérin**

$$\mathcal{P}(\text{verin} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_g) = F V$$

où  $F$  la force du vérin et  $V$  est sa vitesse.

**Puissance des actions de pesanteur efforts intérieurs**

$$\mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{V}}(G; S/\mathcal{R}_g)$$

**Puissances des efforts intérieurs**

$$\mathcal{P}(2 \leftrightarrow 1) = \vec{\mathbf{F}}(2 \rightarrow 1) \cdot \vec{\mathbf{V}}(A; 2/1) + \vec{\mathbf{M}}(A; 2 \rightarrow 1) \cdot \vec{\mathbf{\Omega}}(2/1)$$

où sous la forme d'un co-moment de torseur

**Liaison parfaite (ou roulement sans glissement) entre 1 et 2**

$$\mathcal{P}(2 \leftrightarrow 1) = 0$$

**Liaison avec frottement visqueux**

**Pivot :**  $\mathcal{P}(2 \leftrightarrow 1) = -c\dot{\theta}_{21}^2$

**Glissière :**  $\mathcal{P}(2 \leftrightarrow 1) = -cV_{21}^2$

**Exemple**





## 4.5 Comment déterminer les lois du mouvement

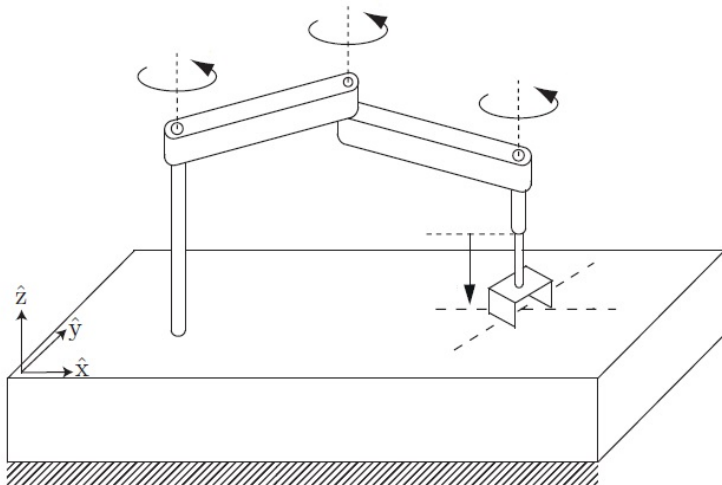
Dans certains cas, il sera utile de déterminer les lois du mouvement reliant les degrés de liberté du système aux actions mécaniques des moteurs sans à calculer toutes les inconnues statiques de liaisons (multiplicateurs de Lagrange).

### 4.5.1 Mécanisme en chaîne ouverte

**Règle 1 :** Pour un système en chaîne ouverte de  $N$  solide, on cherche une équation du mouvement pour chaque degrés de liberté en suivant la démarche suivante :

- On isole le solide  $S_N$  à l'extrémité de la chaîne
- On utilise l'équation du PFD associé au zéro de la liaison entre le solide  $S_N$  et  $S_{N-1}$  pour obtenir la première équation du mouvement
- Ensuite, on isole les deux derniers solides  $\{S_N \cup S_{N-1}\}$  et on utilise l'équation du PFD associé à la liaison entre  $S_{N-1}$  et  $S_{N-2}$ .
- On réitère l'opération en rajoutant le solide suivant dans l'ensemble à isoler pour utiliser l'équation du PFD associé au zéro de la liaison suivante.
- Finalement, on isole tous les solides pour utiliser l'équation du PFD associée au zéro de la liaison entre  $S_1$  et le bâti  $S_0$ .

#### Exemple : Robot SCARA





### 4.5.2 Mécanisme en chaîne fermée

**Règle 2 :** Pour un système en chaîne fermée avec une mobilité de  $m = 1$ , on utilise le TEC pour obtenir directement l'équation du mouvement, en suivant la démarche suivante :

- On cherche les lois donnant tous ddl en fonction de celui associé à la variable d'entrée, associé à l'actionneur du système.
- On isole tout le système (sauf le bâti) puis on applique le TEC pour obtenir directement la loi du mouvement.

**Remarque 4.2** *Il est intéressant de noter que cette approche fonctionne même pour les systèmes hyperstatiques. En effet les puissances associées aux multiplicateurs de Lagrange (ou inconnues statiques des liaisons) s'annulent.*



## 4.6 L'effet gyroscopique

Lorsqu'un solide est en rotation autour d'un axe  $(O, \vec{z})$ , son moment cinétique  $\vec{\sigma}(O; S/\mathcal{R}_g)$  tend à conserver sa direction dans l'espace. Toute action extérieure cherchant à modifier cette direction produit un moment dynamique particulier, appelé **effet gyroscopique**. Celui-ci provient du second terme de l'équation du moment dynamique :

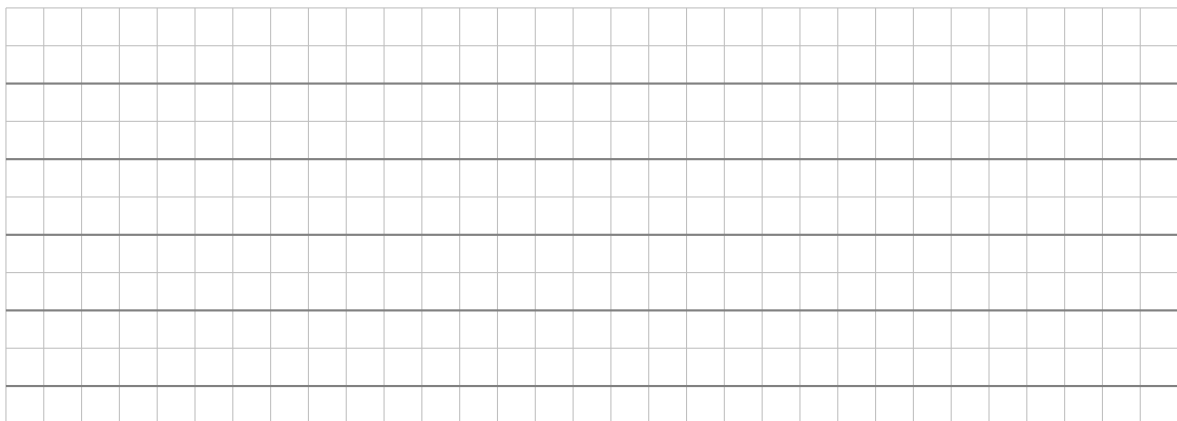
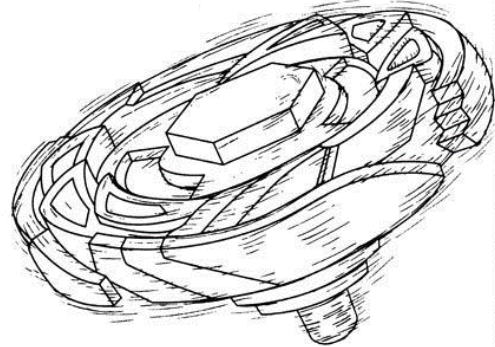
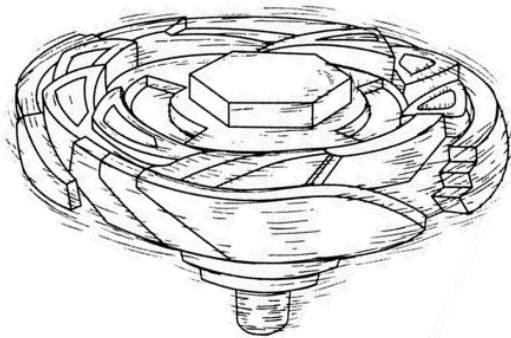
$$\vec{\delta}(O; S/\mathcal{R}_g) = \mathbb{I}[O; S] \cdot \vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \left( \mathbb{I}[O; S] \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \right)$$

$$\vec{\delta}(O; S/\mathcal{R}_g) = \mathbb{I}[O; S] \cdot \vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) + \underbrace{\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{\sigma}(O; S/\mathcal{R}_g)}_{\text{effet gyroscopique}}.$$

Le terme gyroscopique apparaît même lorsque la rotation du solide est uniforme ( $\vec{\alpha}(S/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$ ). Il traduit la résistance du moment cinétique à changer de direction : un solide en rotation oppose une réaction mécanique perpendiculaire à la fois à l'axe de rotation et au moment appliqué. Ainsi, au lieu de basculer dans la direction attendue, le solide se met à *précessionner*, c'est-à-dire à tourner autour d'un troisième axe.

Cet effet est typique de tous les systèmes possédant un moment d'inertie important autour de leur axe de rotation.

### Exemple de la toupie



## Mouvement de précession et direction du mouvement

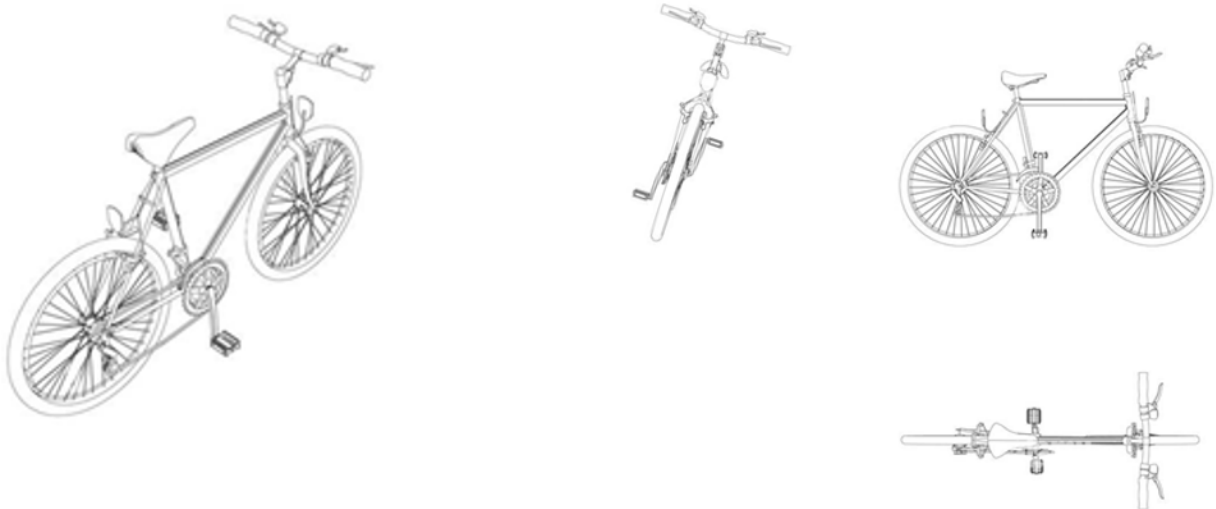
Lorsqu'un solide  $S$  en rotation autour d'un axe quasi fixe  $(O, \vec{z}_1)$  est soumis à un moment extérieur  $\vec{M}(O; \text{ext} \rightarrow S)$  *perpendiculaire* à son moment cinétique  $\vec{\sigma}(O; S/\mathcal{R}_g)$ , la rotation ne bascule pas directement dans la direction du moment appliqué. Au contraire, le solide se met à décrire un **mouvement de précession** : l'axe de rotation tourne autour d'un nouvel axe, sans changer instantanément son inclinaison. En effet, l'axe de rotation n'incline pas directement vers la direction du moment extérieur : il se déplace latéralement. Ce comportement contre-intuitif explique, par exemple, pourquoi une toupie soumise à la pesanteur ne tombe pas immédiatement : son axe tourne autour de la verticale, formant un cône de précession.

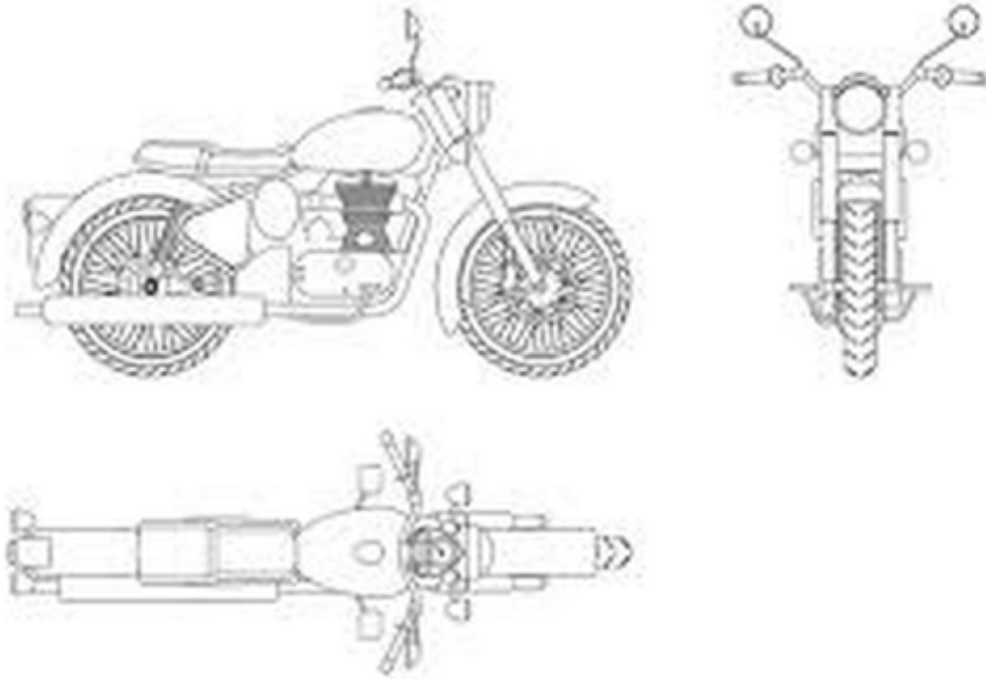
Ainsi, le mouvement de précession résulte du fait qu'un moment extérieur perpendiculaire au moment cinétique ne peut pas faire basculer instantanément l'axe de rotation mais dévie progressivement sa direction, produisant une rotation secondaire dont la direction est perpendiculaire à la fois au moment cinétique au point  $O$  et au moment des actions extérieures au point  $O$ .

La précession se produit dans la direction perpendiculaire à la fois au moment cinétique au point  $O$  et au moment des actions extérieures au point  $O$ . Ainsi, le vecteur taux rotation associé au mouvement de précession  $\vec{\Omega}^p(S/\mathcal{R}_g)$  vérifie

$$\vec{\Omega}^p(S/\mathcal{R}_g) \propto \vec{\sigma}(O; S/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{M}(O; \text{ext} \rightarrow S).$$

### Exemples





L'effet gyroscopique est ainsi une manifestation profonde du comportement des systèmes en rotation. Il explique à la fois la stabilité des objets tournants et leur réaction souvent contre-intuitive à l'application d'un moment extérieur.

## 4.7 Équilibrage statique et dynamique des pièces en rotation

L'équilibrage consiste à réduire les forces et moments indésirables générés par la rotation d'un solide autour d'un axe, afin de limiter les vibrations, les sollicitations mécaniques et l'usure des paliers. On distingue deux notions complémentaires :

- l'équilibrage *statique*,
- l'équilibrage *dynamique*.

### 4.7.1 Équilibrage statique

Un solide en rotation est dit statiquement équilibré lorsque son centre de gravité est situé sur l'axe de rotation. Dans ce cas, l'action de pesanteur ne produit pas de moment autour de l'axe de rotation du solide  $(O, \vec{x}_0)$

$$\vec{M}(O; \vec{P} \rightarrow S) = \vec{0}$$

Dans ce cas, le solide sera en équilibre quelque soit la position angulaire.

### 4.7.2 Équilibrage dynamique

Un solide est **dynamiquement équilibré** lorsque sa résultante dynamique et son moment dynamique sont nulles lorsqu'il tourne à vitesse constante  $\omega$ . Ceci est vrai lorsque :

1. son centre d'inertie est sur l'axe de rotation (équilibrage statique). Dans ce cas, la rotation ne génère aucune force centrifuge résultante entraînant vibrations et charges supplémentaires sur les paliers

$$\vec{\mathbf{R}}_d(S/\mathcal{R}_g) = m \vec{\mathbf{a}}(G/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall \omega$$

2. l'axe de rotation  $(O; \vec{\mathbf{x}}_0)$  est un **axe principal d'inertie**. Dans ce cas, la rotation ne génère aucun moment gyroscopique parasite

$$\vec{\mathbf{\Omega}}(S/\mathcal{R}_g) \wedge (\mathbb{I}[O; S] \cdot \vec{\mathbf{\Omega}}(S/\mathcal{R}_g)) = \vec{\mathbf{0}}.$$

ce qui implique

$$\vec{\delta}(O, S/\mathcal{R}_g) = \mathbb{I}[O; S] \cdot \vec{\alpha} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \text{si } \dot{\omega} = 0.$$

Si le tenseur d'inertie a pour expression

$$\mathbb{I}[O; S] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{z}}_1)}$$

pour le solide  $S$  soit équilibré dynamiquement autour de l'axe  $(O, \vec{\mathbf{x}}_1)$ , il faut que les produits d'inertie soient nuls  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ .

**Remarque 4.3** *Certaines symétries géométriques d'une pièce conduisent automatiquement à l'annulation des termes responsables du déséquilibre dynamique :*

- Symétrie de révolution autour de l'axe de rotation
- Symétrie par deux plans orthogonaux contenant l'axe de rotation
- Si le centre d'inertie  $G$  est sur l'axe de rotation tout plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation entraîne l'équilibrage dynamique

**Remarque 4.4** *L'équilibrage dynamique est crucial dans l'industrie pour éviter les vibrations et charges supplémentaires sur les paliers, même à faible vitesse. Il s'obtient en compensant les masses de manière à ramener le centre d'inertie sur l'axe de rotation et à annuler les produit d'inertie par ajout ou retrait de matière, masselottes équilibrantes, perçages, etc.*

**En bref** Un solide  $S$  en rotation par rapport à  $\mathcal{R}_g$  autour d'un axe passant par le point  $O$  est

**Équilibré statiquement** : Si le centre de gravité  $G$  est sur l'axe de rotation

$$\vec{\mathbf{M}}(O; \vec{\mathbf{P}} \rightarrow S) = \vec{\mathbf{0}}$$

**Équilibré dynamiquement** : Si  $G$  est sur l'axe de rotation et l'axe de rotation est un axe principale d'inertie. Dans ce cas si le solide  $S$  tourne à vitesse constante ( $\dot{\omega} = 0$ ), on a

$$\vec{\mathbf{R}}_d(S/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \text{et } \vec{\delta}(O; S/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathbf{0}}$$

**Exemple**





**Troisième partie**  
**Mathématique pour l'ingénieur**



## RAPPELS D'ANALYSE

*L'analyse est l'outil indispensable de la physique et de l'ingénierie, comme le langage l'est à la poésie.*

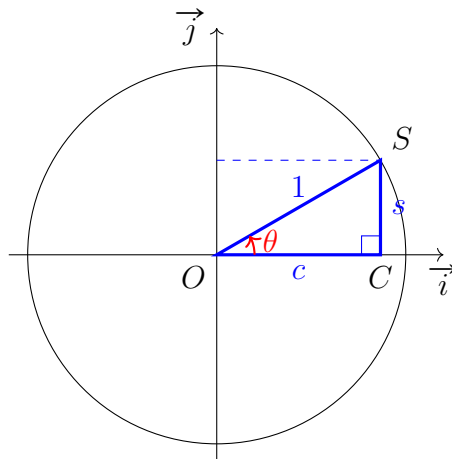
---

– Jean Dieudonné  
Architecte de la mathématique moderne  
française du XXe siècle.

### A.1 Trigonométrie

#### Cercle unitaire

Soit un cercle unitaire de centre  $O$  (et de rayon 1) et un triangle rectangle  $OCS$ .



$$\cos \theta = c, \quad \sin \theta = s \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{s}{c} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

## A.2 Dérivée d'une fonction

En ingénierie, la dérivée d'une fonction représente un outil fondamental pour modéliser et analyser des systèmes physiques, mécaniques, thermiques, etc. Elle permet de décrire les variations, vitesses, pentes, ou de modéliser précisément des phénomènes dynamiques. Maîtriser ses propriétés fondamentales est indispensable pour toute analyse ou simulation en mécanique, thermique, électronique, ou automatique.

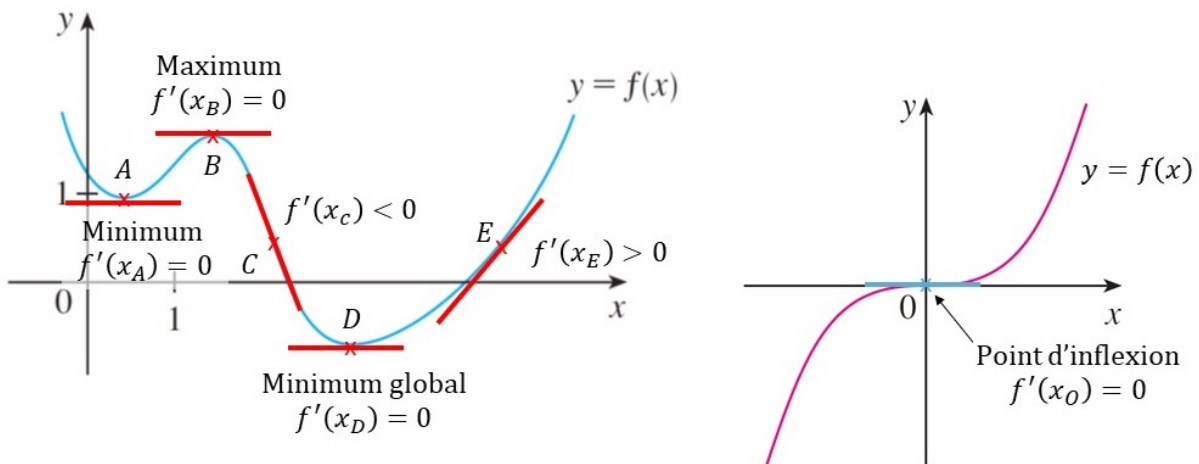
### Définition

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. La dérivée de  $f$  en un point  $x$  est définie par :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si cette limite existe. Elle représente le taux de variation instantané de  $f$  en  $x$ .

### Fonction dérivée et comportement



- $f'(x) > 0$  :  $f$  est croissante (ex : point  $E$ ).
- $f'(x) < 0$  :  $f$  est décroissante (ex : point  $C$ ).
- $f'(x) = 0$  : point stationnaire :
  - minimum,  $f''(x) > 0$ , (ex : points  $A$  et  $D$ ),
  - maximum,  $f''(x) < 0$ , (ex : point  $B$ ),
  - point d'inflexion,  $f''(x) = 0$ , (ex : point  $O$ ).

### Règles de dérivation

— **Linéarité :**

$$(af + bg)' = af' + bg'$$

— **Produit :**

$$(fg)' = f'g + fg'$$

— **Quotient :**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (\text{si } g \neq 0)$$

— **Composition (chaîne) :**

$$(f[g(x)])'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

### Dérivées usuelles

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

## A.3 Rappel sur les Nombres Complexes

Les nombres complexes sont des outils fondamentaux en ingénierie pour modéliser et analyser des phénomènes oscillatoires, ondulatoires et dynamiques. Ils permettent une écriture compacte et efficace des équations différentielles, des signaux périodiques, et des réponses fréquentielles.

### Définition

Un nombre complexe  $z$  est un nombre de la forme :

$$z = x + iy$$

où :

- $x \in \mathbb{R}$  : partie réelle, notée  $\text{Re}(z)$ ,
- $y \in \mathbb{R}$  : partie imaginaire, notée  $\text{Im}(z)$ ,
- $i$  est l'unité imaginaire, définie par  $i^2 = -1$ .

### Module et argument

— Le **module** de  $z$  est :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

— L'**argument**  $\theta$  est l'angle (en radians) que fait  $z$  avec l'axe réel :

$$\arg(z) = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pmod{2\pi}$$

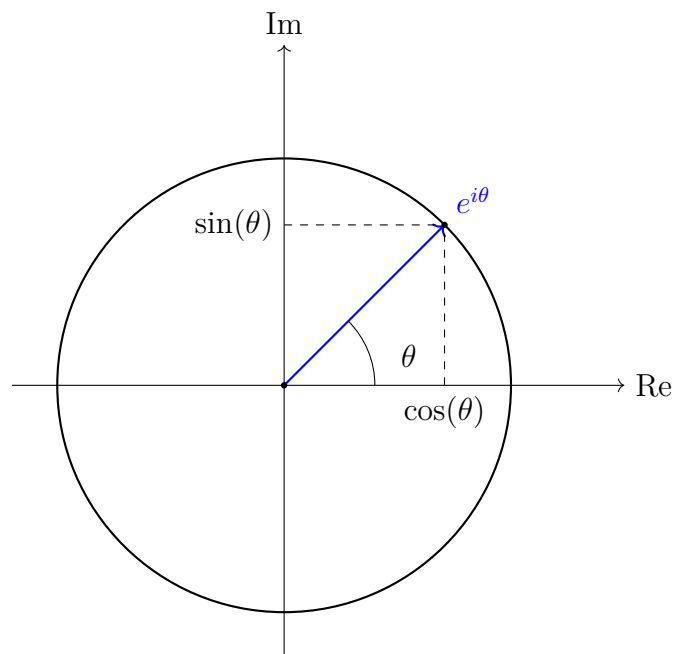
## Forme trigonométrique et exponentielle

Un nombre complexe peut aussi s'écrire :

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{ou} \quad z = |z| e^{i\theta}$$

avec  $|z|$  le module et  $e^{i\theta}$  l'exponentielle complexe.

## Formule d'Euler



$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

## Conjugué et propriétés

— Le **conjugué** de  $z = x + iy$  est :

$$\bar{z} = x - iy$$

— Propriétés utiles :

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$$

## Opérations sur les complexes

— Addition :  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

— Multiplication :

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

— Division :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

## Racines carrées de réels négatifs

Pour un réel négatif  $a < 0$ , on a :

$$\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$$

Ce qui permet de résoudre toutes les équations quadratiques, même sans solution réelle.

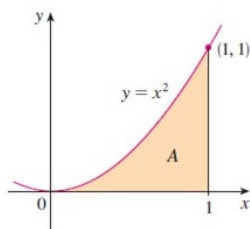
### À retenir

- $z = x + iy$  : forme algébrique
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  : module
- $\arg(z) = \theta$  : argument
- $z = |z|e^{i\theta}$  : forme exponentielle
- $\bar{z} = x - iy$  : conjugué
- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  : Formule d'Euler

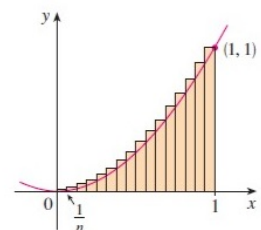
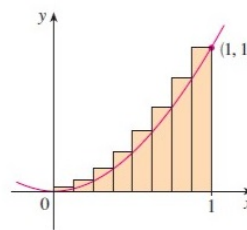
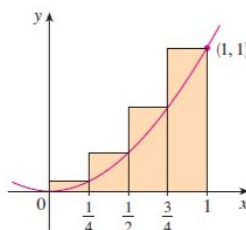
## A.4 Intégration

L'intégrale joue le rôle inverse de la dérivée : elle permet de reconstituer une grandeur à partir de son taux de variation. En physique, elle intervient dans toutes les lois de conservation et d'accumulation (énergie, charge, masse...).

### Définition intuitive



$$A = \int_0^1 y(x) dx$$



Approximation de A

L'intégrale d'une fonction réelle  $f(x)$  sur un intervalle  $[a, b]$  représente l'aire algébrique sous la courbe  $y = f(x)$  entre  $x = a$  et  $x = b$ .

$$\int_a^b f(x) dx$$

- Si  $f(x) \geq 0$ , cela représente une aire positive.
- Si  $f(x) \leq 0$ , cela correspond à une aire négative.

### Définition formelle

L'intégrale est définie comme la limite d'une somme de Riemann :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

où  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , et  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ .

### Primitives et théorème fondamental

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , c'est-à-dire  $F'(x) = f(x)$ , alors :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

### Notations importantes

- $\int f(x) dx$  : intégrale indéfinie (primitive)
- $\int_a^b f(x) dx$  : intégrale définie (valeur réelle)
- $dx$  : variable d'intégration

### Propriétés importantes

- **Linéarité :**

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- **Additivité sur un intervalle :**

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

- **Changement de borne :**

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

### Intégrales usuelles

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

### Méthodes de calcul

#### a) Intégration directe (par primitives)

On identifie une primitive  $F(x)$  de  $f(x)$ , et on applique :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

#### b) Intégration par changement de variable

Soit  $x = g(u)$ , on pose :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u_a}^{u_b} f(g(u))g'(u) du \quad \text{avec} \quad a = g(u_a) \text{ et } b = g(u_b)$$

#### c) Intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

## A.5 Équations différentielles ordinaires linéaires

Les équations différentielles ordinaires (EDO) permettent à l'ingénieur mécanique de modéliser le comportement dynamique des systèmes (mouvements, vibrations, transferts thermiques, circuits hydrauliques, etc.). Elles sont essentielles pour prédire, analyser et optimiser la réponse de machines et structures soumises à diverses contraintes.

### A.5.1 EDO linéaire du 1<sup>er</sup> ordre

Une EDO linéaire du <sup>er</sup> ordre s'écrit sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

où :

- $y = y(t)$  est la fonction inconnue,
- $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions continues sur un intervalle donné.

Sa solution générale est :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- $y_h(t)$  est la solution de l'équation homogène

$$y_h(t) = \frac{C}{\mu(t)}$$

- $y_p(t)$  est la solution particulière de l'équation complète

$$y_p(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t) dt$$

où  $C$  est une constante et  $\mu(t)$  est le facteur intégrant défini par

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$$

**Remarque A.1** *La constante  $C$  d'intégration est déterminée en appliquant la condition initiale à la solution générale. Cela garantit l'unicité de la solution dans les conditions données (théorème de Cauchy-Lipschitz).*

#### Exemple

Résoudre :

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 4$$

tel que  $y(0) = 0$

1. Calculer le facteur intégrant :

$$\mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

2. Déterminer la solution homogène :

$$y_h(t) = \frac{C}{\mu(t)} = e^{-2t}$$

3. Calculer la solution particulière :

$$y_p(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t) dt = e^{-2t} \int 4e^{2t} dt = 2$$

4. En déduire la solution générale :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = 2 + Ce^{-2t}$$

5. Déterminer la constante avec la condition initiale

$$y(0) = 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2$$

6. En déduire la solution

$$y(t) = 2(1 - e^{-2t})$$

## A.5.2 Équation Différentielle Linéaire du Second Ordre à Coefficients Constants

### Forme générale

L'EDO linéaire du second ordre à coefficients constants avec conditions initiales s'écrit :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = v_0$$

où :

- $\omega_0$  est la pulsation propre du système (rad/s),
- $\zeta$  est le coefficient d'amortissement (sans dimension),
- $f(t)$  est un terme source (souvent nul dans les cas étudiés),
- $y(t)$  est la grandeur dynamique étudiée (position, tension, etc.).

Sa solution générale est :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- $y_h(t)$  est la solution de l'équation homogène
- $y_p(t)$  est la solution particulière de l'équation complète

### Cas sans forçage : $f(t) = 0$

On étudie l'équation homogène :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est :

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Les racines  $r_1, r_2$  déterminent la nature de la solution selon la valeur de  $\zeta$ .

**Cas 1 : Sur-amorti** ( $\zeta > 1$ ) Deux racines réelles distinctes  $r_1, r_2$  négatives :

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\boxed{y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$

**Cas 2 : Amortissement critique** ( $\zeta = 1$ ) Une racine réelle double :

$$r = -\omega_0$$

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

**Cas 3 : Sous-amorti** ( $0 \leq \zeta < 1$ ) Racines complexes conjuguées :

$$r = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_d, \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t))$$

**Cas avec forçage** :  $f(t) \neq 0$

La méthode systématique est

1. Calculer la solution homogène  $y_h(t)$
2. Chercher la forme de  $y_p(t)$  en fonction de celle de  $f(t)$  (voir Tableau A.1)
3. Remplacer dans l'équation non-homogène pour trouver les coefficients
4. Combiner les solutions homogènes et particulières

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

5. Appliquer les conditions initiales pour trouver les constantes  $A$  et  $B$ .

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

Forçage $f(t)$	Forme test pour $y_p(t)$
$P(t)$ polynôme	polynôme de même degré
$e^{\lambda t}$	$Ae^{\lambda t}$
harmonique : $e^{i\omega t}$	$\hat{A}e^{i\omega t}$ $\hat{A} \in \mathbb{C}$

TABLE A.1 – Choix de la forme test pour la solution particulière selon le forçage  $f(t)$

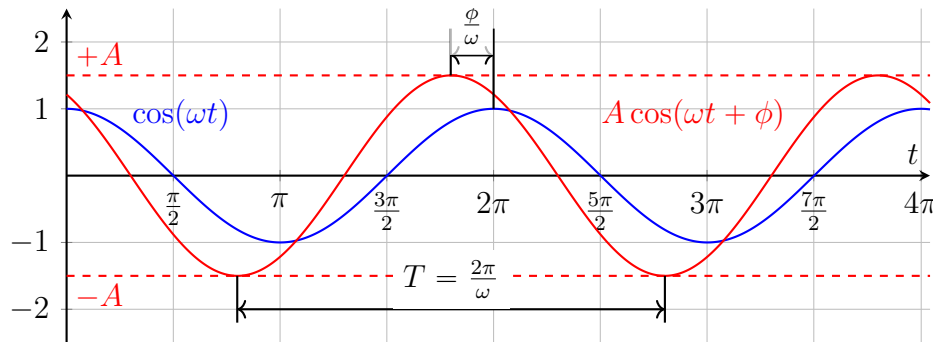
**Cas avec forçage harmoniques**  $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Dans le cas d'un forçage harmonique  $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , la solution particulière est également harmonique de même pulsation  $\omega$

$$y_p = Y_0 \cos(\omega t + \phi)$$

où  $Y_0$  est l'amplitude et  $\phi$  le déphasage.

### Rappels sur les fonctions harmoniques



#### Définition

- Fonction sinusoïdale :  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$
- Fonction cosinus :  $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

avec :

- $A$  : amplitude,
- $\omega$  : pulsation ( $\omega = 2\pi f$ ) qui a pour unité le  $[\text{rad.s}^{-1}]$ ,
- $\varphi$  : phase à l'origine.

#### Forme complexe

Dans la pratique, on utilise une solution particulière sous forme complexe :

$$y_p(t) = \text{Re} [\tilde{Y} e^{i\omega t}]$$

où  $\tilde{Y}$  est un nombre complexe (amplitude et phase de la réponse). On résout dans  $\mathbb{C}$ , puis on prend la partie réelle.

On utilise la forme complexe  $e^{i\omega t}$  car elle permet :

- Des manipulations algébriques plus simples : dériver et intégrer  $e^{i\omega t}$  est plus direct.
- La superposition naturelle des solutions (théorie de Fourier).
- Évite la duplication sin/cos dans les EDO complexes.

#### Méthode :

1. Remplacer  $\cos(\omega t)$  par  $\text{Re}(e^{i\omega t})$
2. Poser  $y(t) = \tilde{Y} e^{i\omega t}$  dans l'EDO
3. Résoudre pour  $\tilde{Y}$  (complexe)
4. En déduire la solution réelle :  $y(t) = |\tilde{Y}| \cos(\omega t + \arg(\tilde{Y}))$



# QUELQUES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

*La géométrie n'est pas faite pour être apprise, elle est faite pour être utilisée.*

— Seymour Papert  
Mathématicien et informaticien au MIT, l'un des pionniers de l'I.A.

## B.1 Les vecteurs

### Définition

Un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ  $A$  et un point d'arrivée  $B$ . On définit un vecteur lié, par quatre caractéristiques

- une direction, la droite  $(AB)$
- un sens, de  $A$  vers  $B$
- une norme, la distance  $d(A, B)$
- un point d'application,  $A$

### Coordonnées d'un vecteur

Dans l'espace vectoriel à trois dimensions, trois vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  indépendants forment une base. L'association d'un point  $O$  à cette base constitue un repère. Soit  $A$  et  $B$  ayant pour coordonnées respectives  $(x_A, y_A, z_A)$  et  $(x_B, y_B, z_B)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  alors le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

avec

$$X = x_B - x_A \quad Y = y_B - y_A \quad Z = z_B - z_A$$

Les vecteurs peuvent également être écrits en colonne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}_{(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

## Norme d'un vecteur

La norme (ou le module) d'un vecteur est la distance en entre l'origine et l'extrémité de ce vecteur. On note

$$\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

## B.2 Produit scalaire

### Définition

Le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre réel suivant noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

### Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. Symétrie :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. Linéarité :  $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

### Expression analytique

Dans une repère orthonormée  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{v}_1$  de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $\vec{v}_2$  de coordonnées  $(x_2, y_2, z_2)$  s'écrit :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

### Exemple

Soient deux bases orthonormées directes  $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ . La base  $\mathcal{B}_2$  s'obtient de la base  $\mathcal{B}_1$  par rotation d'angle  $\theta_{12}$  autour du vecteur  $\vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_{12}$ .

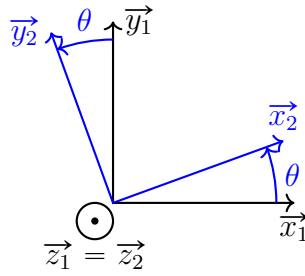


FIGURE B.1 – Figure de calcul

$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos \theta$	$\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 = -\sin \theta$	$\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_{12} = 0$
$\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = \sin \theta$	$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 = \cos \theta$	$\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_{12} = 0$
$\vec{z}_{12} \cdot \vec{x}_2 = 0$	$\vec{z}_{12} \cdot \vec{y}_2 = 0$	$\vec{z}_{12} \cdot \vec{z}_{12} = 1$

**Remarque B.1** Pour éviter les erreurs de signes lors des projections (ou des calculs produits scalaires), il est nécessaire de toujours représenter les figures de calculs dans la configuration de la figure B.2. C'est-à-dire de placer ici le vecteur  $\vec{x}_2$  dans le premier cadran entre  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$ , pour  $\theta_{12} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

### B.3 Produit vectoriel

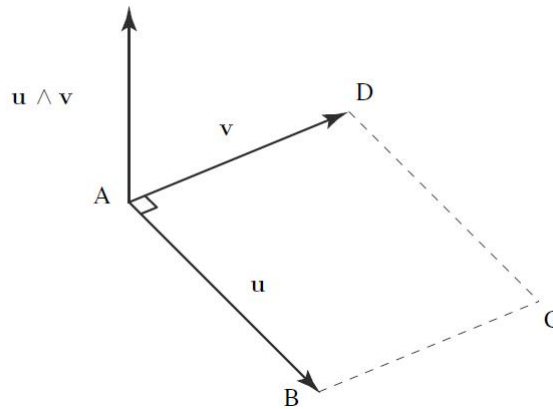


FIGURE B.2 – Produit vectoriel

#### Définition

Le produit vectoriel des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  tel que,  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  soit perpendiculaire au plan  $(\vec{u}, \vec{v})$ , le trièdre  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  soit direct et la norme de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  soit égale à :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

## Interprétation géométrique

La norme du produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , représente la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

## Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. Antisymétrie :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
2. Linéarité :  $\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
3. Application à une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} & \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} & \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} & \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \end{array}$$

4. Double produit vectoriel (formule de Gibbs)

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{v} + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

## Expression analytique

Dans une repère orthonormée  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{v}_1$  de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $\vec{v}_2$  de coordonnées  $(x_2, y_2, z_2)$  s'écrit :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

en notation colonne

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{vmatrix}$$

Et en utilisant le déterminant d'une matrice  $3 \times 3$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} \end{aligned}$$

### Exemple

On reprendre le même exemple que pour le produit scalaire, c'est-à-dire de deux bases orthonormées directes  $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en rotation l'une par rapport à l'autre d'un angle  $\theta$  autour du vecteur  $\vec{z}_{12}$ .

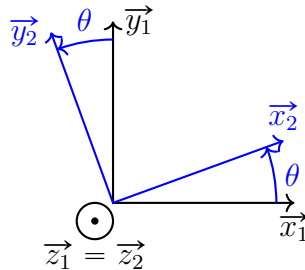


FIGURE B.3 – Figure de calcul

$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = \sin \theta \vec{z}_{12}$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = \cos \theta \vec{z}_{12}$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_{12} = -\vec{y}_1$
$\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\cos \theta \vec{z}_{12}$	$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = \sin \theta \vec{z}_{12}$	$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_{12} = \vec{x}_1$
$\vec{z}_{12} \wedge \vec{x}_2 = \vec{y}_2$	$\vec{z}_{12} \wedge \vec{y}_2 = -\vec{x}_2$	$\vec{z}_{12} \wedge \vec{z}_{12} = \vec{0}$

## B.4 Dérivée d'un vecteur

### Définition

Par définition la dériver d'un vecteur  $\vec{v}(t)$  par rapport a la variable  $t$ , dans une base  $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est le vecteur suivant :

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}$$

Par conséquent, la dérivée d'un vecteur  $\vec{v}$  dépend du choix de la base de référence  $\mathcal{B}$  dans lequel est exprimé le vecteur. En pratique, il est donc **nécessaire de toujours préciser par rapport à quelle base est effectuée la dérivée.**

### Propriétés

1. Lnéarité :

$$\left. \frac{d(\alpha \vec{v}_1 + \vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \alpha \left. \frac{d(\vec{v}_1)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} + \left. \frac{d(\vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}}$$

2. Dérivée du produit scalaire :

$$\left. \frac{d(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \left. \frac{d(\vec{v}_1)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \left. \frac{d(\vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}}$$

3. Dérivée d'un produit vectoriel :

$$\left. \frac{d(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \left. \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \left. \frac{d\vec{v}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}}$$

4. Dérivée d'un produit mixte :

$$\left. \frac{d(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \left( \left. \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}}, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right) + \left( \vec{v}_2, \left. \frac{d\vec{v}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}}, \vec{v}_3 \right) + \left( \vec{v}_1, \vec{v}_2, \left. \frac{d\vec{v}_3}{dt} \right|_{\mathcal{B}} \right)$$

5. Dérivée d'un vecteur dépendant d'une fonction :

$$\left. \frac{d\vec{v}(\theta(t))}{dt} \right|_{\mathcal{B}} = \left. \frac{d\vec{v}(\theta)}{d\theta} \right|_{\mathcal{B}} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

## Formule de Bour

La formule de Bour, ou formule de dérivation d'un vecteur dans une base mobile, permet de relier la dérivée d'un vecteur dans la  $\mathcal{B}_1$  à celle dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{v}$$

où  $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_\epsilon/\mathcal{B}_1)$  est le vecteur taux de rotation de la base  $\mathcal{B}_2$  par rapport à la base  $\mathcal{B}_1$ .

## Quelques propriétés du vecteur vitesse de rotation

1. Composition des vecteurs vitesses de rotations

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_1) = \vec{\Omega}(\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_2) + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)$$

2. Inversion des bases de dérivations

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) = -\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)$$

## Exemple

On se place toujours dans le cas de deux bases orthonormées directes  $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en rotation l'une par rapport à l'autre d'un angle  $\theta$  autour du vecteur  $\vec{z}_{12}$ . Les dérivées des vecteurs de la  $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  rapport à la base  $\mathcal{B}_1$  sont nulles

$$\left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} = \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} = \left. \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} = \vec{0}$$

La projection des vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &= \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 &= -\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1 \\ \vec{z}_2 &= \vec{z}_1 \end{aligned}$$

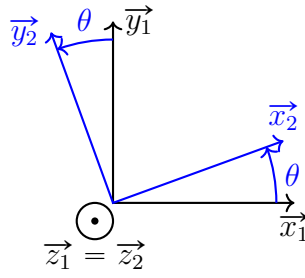


FIGURE B.4 – Figure de calcul

En dérivant les expressions de droite, on obtient

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{x}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_1 = \dot{\theta} \vec{y}_2 \\ \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{x}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_1 = -\dot{\theta} \vec{x}_2 \\ \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Dans notre exemple, le vecteur taux de rotation de la base  $\mathcal{B}_2$  par rapport à la base  $\mathcal{B}_1$  est porté par l'axe de rotation  $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$  et de norme la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

Utilisation de la formule de changement de dérivation dans la base mobile

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{x}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 = \dot{\theta} \vec{y}_2 \\ \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta} \vec{x}_2 \\ \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} &= \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2 = \vec{0} \end{aligned}$$

**Remarque B.2** Les expressions de  $\left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1}$  et  $\left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1}$  dans la base  $\mathcal{B}_2$  sont plus simples. Bien qu'on dérive par rapport à la base  $\mathcal{B}_1$ , l'utilisation de la formule de changement de base de dérivation conduit à des expressions simples dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

**Remarque B.3** Dans notre exemple, on constate que dériver les vecteurs  $\vec{x}_2$  et  $\vec{y}_2$  dans la base  $\mathcal{B}_1$  revient à les multiplier par la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  et à leur appliquer une rotation d'angle  $+\pi/2$  autour de l'axe  $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ .



---

# INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

En dynamique, les équations du mouvement font intervenir des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) du second ordre, souvent impossibles à résoudre analytiquement à cause de leur nombre et des non-linéarités. L'intégration numérique permet alors d'approcher pas à pas l'évolution du système dans le temps, offrant une solution pratique et précise aux équations de mouvement réelles.

## C.1 Démarche de résolution numérique d'une EDO

La résolution numérique d'une EDO du second ordre consiste à approximer la solution d'une équation du type :

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

sur un intervalle de temps donné, lorsque la solution analytique est difficile, voire impossible, à obtenir.

En d'autres termes, le but de la résolution numérique est de construire une suite d'approximations  $x_n \approx x(t_n)$  permettant d'estimer le comportement de la solution sur un intervalle  $[t_0, T]$ .

La démarche générale peut être décomposée en quatre étapes principales :

1. **Formuler** ;
2. **Discrétiser** ;
3. **Choisir de la méthode numérique** ;
4. **Analyser la qualité du résultat**.

### Formulation

Pour résoudre le problème on doit le mettre sous la forme d'un problème de **valeur initiale** (PVI) qui s'écrit :

Trouver  $y(t)$  telle que :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

## Discrétisation

On remplace l'intervalle continu  $[t_0, T]$  par un maillage discret défini par :

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

où  $h = \frac{T-t_0}{N}$  est le **pas de temps**.

L'objectif ici est d'approximer la dérivée  $\dot{y}(t)$  par une différence finie et d'obtenir une relation récursive entre  $y_n$  et  $y_{n+1}$ .

## Méthode numérique

Plusieurs schémas existent pour estimer  $y_{n+1}$  à partir de  $y_n$  :

### Méthode d'Euler explicite :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

Simple à mettre en œuvre, cette méthode est d'ordre 1 mais présente une stabilité limitée.

### Méthode d'Euler implicite :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Cette méthode nécessite la résolution d'une équation implicite à chaque pas, mais elle est plus stable, notamment pour les problèmes raides.

**Autres méthodes** Il existe d'autres méthodes, non-détaillées ici, telles que :

- le  $\Theta$ -schéma ;
- le schéma de Newmark ;
- le schéma de Runge–Kutta ;
- le schéma de Verlet appelé également schéma Stormer–Verlet ou schéma de Leap-Frog ;
- les schémas GSTIFF, WSTIFF et SI2-GSTIFF utilisés dans le module “*Motion*” du logiciel SolidWork.

## Analyse de la qualité du résultat

L'évaluation de la qualité d'une méthode repose sur plusieurs critères :

- **Erreur locale et globale** : l'erreur locale de troncature est l'écart commis à chaque pas, tandis que l'erreur globale cumule ces écarts sur tout l'intervalle.
- **Ordre de la méthode** : une méthode est d'ordre  $p$  si l'erreur globale est proportionnelle à  $h^p$ .
- **Consistance** : la méthode est consistante si, lorsque  $h \rightarrow 0$ , l'équation numérique tend vers l'équation différentielle originale.

- **Stabilité** : la méthode est stable si les erreurs ne s'amplifient pas au cours des itérations. Les schémas implicites sont en général plus stables que les schémas explicites.
- **Convergence** : une méthode consistante et stable est convergente, c'est-à-dire que la solution numérique tend vers la solution exacte lorsque  $h \rightarrow 0$ .
- **Caractère symplectique** : pour les systèmes dynamiques conservatives, les méthodes dites *symplectiques* conservent l'énergie mécanique constante. Ces méthodes, comme les schémas de Stormer-Verlet ou Leap-frog, offrent une excellente conservation de l'énergie mécanique sur des temps long.

## C.2 Exemple : pendule simple

La dynamique du pendule simple sans frottement est régie par l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\text{Trouver } \theta(t) \text{ telle que } \begin{cases} \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin \theta(t) = 0, \\ \theta(t_0) = \theta^*, \quad \dot{\theta}(t_0) = \omega^*. \end{cases}$$

### Formuler

Pour écrire cette équation du mouvement sous la forme d'un **problème de valeur initiale** (PVI) du premier ordre, on procède au changement de variable suivant :

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t).$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = -\omega_0^2 \sin \theta(t), \\ \theta(t_0) = \theta^*, \\ \omega(t_0) = \omega^*, \end{cases} \quad \text{où } \omega_0^2 = \frac{g}{L}.$$

On constate ainsi que l'EDO du second ordre a été transformée en un système de deux EDO du premier ordre, ou encore en une **EDO vectorielle** s'écrivant :

$$y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, y(t)) = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ -\omega_0^2 \sin \theta(t) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le PVI vectoriel :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = \begin{pmatrix} \theta^* \\ \omega^* \end{pmatrix}.$$

## Discrétiser

On considère un maillage temporel discret :

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

où  $h$  désigne le pas de temps d'intégration. Les valeurs approchées de  $\theta(t_n)$  et  $\omega(t_n)$  sont notées  $\theta_n$  et  $\omega_n$ .

Le choix du paramètre  $h$  dépend de la période propre du pendule :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

pour garantir une bonne précision et la stabilité du schéma. En pratique, on choisira :

- $h \approx T_0/100$  pour le schéma d'Euler explicite
- $h \approx T_0/10$  pour le schéma d'Euler implicite

## Intégrer

### Méthode d'Euler explicite

Le système obtenu :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = -\omega_0^2 \sin \theta(t), \end{cases} \quad \text{où } \omega_0^2 = \frac{g}{L},$$

peut être intégré numériquement à l'aide de la **méthode d'Euler explicite**.

Le schéma d'Euler explicite s'écrit alors :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + h\omega_n, \\ \omega_{n+1} = \omega_n - h\omega_0^2 \sin \theta_n. \end{cases}$$

Ce schéma est :

- **simple à implémenter** : il ne nécessite qu'une seule évaluation de la fonction  $f(t_n, y_n)$  par pas de temps ;
- **d'ordre 1** : l'erreur globale est proportionnelle à  $h$  ;
- **peu stable** pour les systèmes oscillatoires : le schéma peut produire une dérive énergétique, notamment lorsque  $h$  est trop grand.

### Méthode d'Euler implicite

Pour un pas de temps  $h$ , le schéma d'Euler implicite s'écrit :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + h\omega_{n+1}, \\ \omega_{n+1} = \omega_n - h\frac{g}{L} \sin \theta_{n+1}. \end{cases}$$

Contrairement au schéma explicite, la valeur inconnue  $(\theta_{n+1}, \omega_{n+1})$  apparaît dans le membre droit. Le calcul de  $\theta_{n+1}$  et  $\omega_{n+1}$  nécessite donc la résolution d'un système **non linéaire implicite** à chaque pas de temps.

En éliminant  $\omega_{n+1}$ , on obtient une équation scalaire pour  $\theta_{n+1}$  :

$$F(\theta_{n+1}) = \theta_{n+1} - \theta_n - h\omega_n + h^2 \frac{g}{L} \sin \theta_{n+1} = 0,$$

que l'on résout à l'aide d'une méthode itérative telle que **Newton–Raphson**. Une fois  $\theta_{n+1}$  déterminée, on déduit :

$$\omega_{n+1} = \omega_n - h \frac{g}{L} \sin \theta_{n+1}.$$

Ce schéma est :

- **Ordre de précision** : le schéma d'Euler implicite est d'ordre 1 (comme le schéma explicite).
- **Stabilité** : il est *inconditionnellement stable* pour les systèmes linéaires du type oscillateur harmonique. Cela signifie que la solution numérique reste bornée pour tout pas de temps  $h > 0$ .
- **Dissipation numérique** : bien que stable, le schéma introduit une *diminution artificielle de l'énergie mécanique*, ce qui se traduit par un amortissement progressif des oscillations.
- **Robustesse** : il permet de simuler sans divergence des systèmes raides ou soumis à de grandes valeurs de  $\omega_0$ .

Ce schéma d'intégration ne conserve donc pas l'énergie mécanique, il introduit une dissipation numérique. Cependant, sa robustesse et sa stabilité en font une méthode adaptée à la simulation de systèmes fortement non linéaires ou amortis.

### Méthode de Verlet

La méthode de **Verlet**, également appelée **Störmer–Verlet** ou **Leap–Frog**, est une méthode d'intégration numérique de second ordre particulièrement adaptée aux systèmes dynamiques conservatifs, tels que le pendule simple.

Le schéma de Verlet consiste à exprimer les positions au pas suivant à l'aide des valeurs de position et de vitesse des pas précédents, selon une approximation centrée. Dans sa forme dite *position–Verlet*, il s'écrit :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = 2\theta_n - \theta_{n-1} - h^2 \omega_0^2 \sin \theta_n, \\ \omega_n = \frac{\theta_{n+1} - \theta_{n-1}}{2h}. \end{cases}$$

Ce schéma est d'ordre 2 et ne nécessite qu'une seule évaluation de la force  $\sin \theta_n$  par pas de temps.

Une autre forme équivalente, souvent utilisée pour des raisons numériques et de clarté, est le schéma **leap–frog** (« saut de grenouille ») :

$$\begin{cases} \omega_{n+\frac{1}{2}} = \omega_n - \frac{h}{2} \omega_0^2 \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} = \theta_n + h \omega_{n+\frac{1}{2}}, \\ \omega_{n+1} = \omega_{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} \omega_0^2 \sin \theta_{n+1}. \end{cases}$$

Dans cette version, les vitesses sont décalées d'un demi-pas temporel par rapport aux positions, ce qui assure une meilleure symétrie temporelle.

Ce schéma est :

- **Ordre de précision** : le schéma de Verlet est d'ordre 2 (erreur globale  $O(h^2)$ ).
- **Symplecticité** : la méthode conserve quasi parfaitement l'énergie du système sur de longues durées.
- **Stabilité** : le schéma est stable pour des pas vérifiant  $h\omega_0 < 2$ . En pratique, on choisit généralement :

$$h \leq \frac{T_0}{20}.$$

- **Réversibilité temporelle** : contrairement à Euler explicite ou implicite, le schéma de Verlet est *invariant par renversement du temps* : si l'on inverse le signe de  $\omega$ , le système revient exactement sur sa trajectoire initiale.
- **Avantages** :
  - excellente conservation de l'énergie mécanique ;
  - stabilité accrue pour les systèmes oscillatoires ou conservatifs ;
  - simplicité de mise en œuvre (pas de résolution implicite).
- **Limites** :
  - nécessite deux valeurs initiales  $\theta_0$  et  $\theta_1$  pour démarrer (ou bien  $\theta_0$  et  $\omega_0$ ) ;
  - moins adapté aux systèmes fortement amortis ou non hamiltoniens.

### Méthode de Runge–Kutta d'ordre 4

Les méthodes de **Runge–Kutta** constituent une famille d'algorithmes d'intégration numérique permettant d'obtenir une approximation précise des solutions d'équations différentielles ordinaires sans recourir à des dérivées d'ordre supérieur. Parmi elles, la méthode de **Runge–Kutta d'ordre 4 (RK4)** est la plus utilisée en pratique, offrant un excellent compromis entre précision et coût de calcul.

Le schéma RK4 procède à quatre évaluations successives de la fonction  $f$  à chaque pas de temps  $h$ , afin d'obtenir une approximation de  $y(t_{n+1})$  avec une erreur locale d'ordre  $O(h^5)$  et une erreur globale d'ordre  $O(h^4)$ .

À partir de l'état connu  $y_n \approx y(t_n)$ , les pentes intermédiaires sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3). \end{cases}$$

La solution est ensuite mise à jour par la combinaison pondérée :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Ce schéma est :

- **Ordre de précision** : la méthode RK4 est d'ordre 4, c'est-à-dire que l'erreur globale est proportionnelle à  $h^4$ .
- **Stabilité** : la méthode est stable pour des pas modérés  $h$  entre  $T_0/100$  et  $T_0/50$
- **Conservation énergétique** : la méthode RK4 n'est pas symplectique, donc elle ne conserve pas strictement l'énergie mécanique. Cependant, les erreurs d'énergie sont faibles et ne dérivent pas significativement si le pas  $h$  reste petit.
- **Précision** : pour une erreur de même amplitude que le schéma d'Euler, on peut utiliser un pas environ dix fois plus grand avec RK4.
- **Avantages** :
  - très bonne précision pour un coût de calcul modéré;
  - simplicité de mise en œuvre (aucune résolution implicite);
  - large domaine de stabilité pour des pas raisonnables.
- **Limites** :
  - méthode non symplectique : dérive énergétique à long terme;
  - pas optimal pour des systèmes fortement oscillatoires ou raides;
  - nécessite quatre évaluations de  $f$  par pas (coût supérieur à Euler ou Verlet).

## Analyser

Propriétés	Euler explicite	Euler implicite	Verlet	Runge–Kutta 4
Nature	Explicite	Implicite	Explicite, symplectique	Explicite, non symplectique
Ordre de précision	1	1	2	4
Stabilité	Conditionnelle	Inconditionnelle	Conditionnelle (bonne)	Bonne (modérée)
Conservation de l'énergie	Mauvaise : dérive forte	Dissipative : perte d'énergie	Excellente : énergie quasi conservée	Bonne à court terme, dérive lente
Choix du pas $h$	Très petit : $h \ll T_0/10$	Grand possible (limité par précision)	$h \lesssim T_0/(2\pi)$	$h \approx T_0/50$ à $T_0/100$
Applications typiques	Systèmes simples, tests rapides	Systèmes raides, amortis	Systèmes conservatifs	Précision élevée

TABLE C.1 – Comparaison synthétique des principales méthodes d'intégration temporelle.

## C.3 Exemple 2 : double pendule

On considère un double pendule plan composé de deux tiges rigides de longueurs  $L_1$  et  $L_2$ , portant respectivement les masses  $m_1$  et  $m_2$ . Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont mesurés à partir

de la verticale descendante. Sous l'action de la gravité  $g$ , les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)L_1\ddot{\theta}_1 + m_2L_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2L_2(\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0, \\ m_2L_2\ddot{\theta}_2 + m_2L_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2L_1(\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2g \sin \theta_2 = 0. \end{cases}$$

En introduisant les vitesses angulaires  $\omega_i = \dot{\theta}_i$ , le système peut se mettre sous forme d'un problème de valeur initiale :

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Les composantes de  $f(t, y)$  sont données par :

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dot{\omega}_1(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \\ \dot{\omega}_2(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \end{pmatrix},$$

avec :

$$\dot{\omega}_1 = \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) [L_2(\omega_2)^2 + L_1(\omega_1)^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{L_1 [2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]},$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) [L_1(\omega_1)^2(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + L_2m_2(\omega_2)^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{L_2 [2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]}.$$

Ce système non linéaire de dimension 4 peut alors être intégré numériquement.

## RAPPEL SUR LES MATRICES $3 \times 3$

### D.1 Définition d'une matrice $3 \times 3$

Une matrice  $3 \times 3$  est un tableau de 3 lignes et 3 colonnes contenant des nombres. On la note généralement :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Chaque élément  $a_{ij}$  correspond à la valeur située à la **ligne**  $i$  et à la **colonne**  $j$ .

### D.2 Produit matrice-vecteur

Le produit d'une matrice  $3 \times 3$  par un vecteur colonne  $X$  de dimension  $3 \times 1$  donne un nouveau vecteur colonne  $Y = AX$  de dimension  $3 \times 1$  :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

alors

$$Y = A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

**Exemple :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

alors :

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 0 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times (-1) \\ 0 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

### D.3 Produit de matrices

#### Définition

Soient deux matrices  $A$  et  $B$  telles que :

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

Le **produit matriciel**  $C = A \cdot B$  est défini si et seulement si le **nombre de colonnes de  $A$**  est égal au **nombre de lignes de  $B$** . Le résultat est une matrice  $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ .

Chaque élément  $c_{ij}$  de  $C$  est obtenu par le produit scalaire de la  $i$ -ème ligne de  $A$  avec la  $j$ -ème colonne de  $B$  :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

#### Produit de matrices carrées $3 \times 3$

Dans le cas particulier où  $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , le produit  $C = AB$  est encore une matrice  $3 \times 3$  :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

**Exemple** Considérons les deux matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le produit  $C = A \cdot B$  est défini car les deux matrices sont carrées de même taille. On calcule chaque élément  $c_{ij}$  par :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

Calcul détaillé :

$$c_{11} = 1(-2) + 2(0) + 3(1) = -2 + 0 + 3 = 1$$

$$c_{12} = 1(1) + 2(-1) + 3(0) = 1 - 2 + 0 = -1$$

$$c_{13} = 1(0) + 2(3) + 3(2) = 0 + 6 + 6 = 12$$

$$c_{21} = 0(-2) + 1(0) + 4(1) = 0 + 0 + 4 = 4$$

$$c_{22} = 0(1) + 1(-1) + 4(0) = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$c_{23} = 0(0) + 1(3) + 4(2) = 0 + 3 + 8 = 11$$

$$c_{31} = 5(-2) + 6(0) + 0(1) = -10 + 0 + 0 = -10$$

$$c_{32} = 5(1) + 6(-1) + 0(0) = 5 - 6 + 0 = -1$$

$$c_{33} = 5(0) + 6(3) + 0(2) = 0 + 18 + 0 = 18$$

Résultat final :

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 4 & -1 & 11 \\ -10 & -1 & 18 \end{bmatrix}$$

## Propriétés du produit matriciel

Pour toutes matrices  $A, B, C$  de dimensions compatibles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (AB)C = A(BC) & \text{(associativité)} \\ A(B + C) = AB + AC & \text{(distributivité à gauche)} \\ (B + C)A = BA + CA & \text{(distributivité à droite)} \\ AI = IA = A & \text{(élément neutre)} \\ (AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top} & \text{(transposition d'un produit)} \end{array} \right.$$

**Attention :** le produit matriciel n'est pas commutatif en général :

$$AB \neq BA$$

même lorsque les deux produits sont définis.

## D.4 Transposée d'une matrice

La matrice transposée  $A^T$  s'obtient en **inversant les lignes et les colonnes** de  $A$  :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

**Exemple :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

## D.5 Déterminant d'une matrice $3 \times 3$

Le déterminant d'une matrice  $3 \times 3$ , noté  $\det(A)$ , est défini par :

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

**Exemple numérique :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1(1 \times 0 - 4 \times 6) - 2(0 \times 0 - 4 \times 5) + 3(0 \times 6 - 1 \times 5) = (-24) + 40 - 15 = 1$$

## D.6 Inverse d'une matrice $3 \times 3$

### Définition

Soit une matrice carrée  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . On dit que  $A$  est inversible s'il existe une matrice  $A^{-1}$  telle que :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

où  $I$  est la matrice identité :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $A^{-1}$  s'appelle **l'inverse** de  $A$ .

### Condition d'inversibilité

Une matrice  $A$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul :

$$\det(A) \neq 0$$

Si  $\det(A) = 0$ , la matrice est dite **singulière** et n'admet pas d'inverse.

### Propriétés de l'inverse

Pour deux matrices inversibles  $A$  et  $B$  de même taille :

$$\begin{cases} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \\ (A^{-1})^{-1} = A \\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \end{cases}$$

## D.7 Matrice orthogonale

Une matrice  $\mathbf{R}$  est dite **orthogonale** si :

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = I$$

où  $I$  est la matrice identité. Dans ce cas, son déterminant vaut toujours  $+1$  ou  $-1$  :

$$\det(\mathbf{R}) = \pm 1$$

## D.8 Matrices de rotation dans $\mathbb{R}^3$

Les matrices de rotation sont des cas particuliers de matrices orthogonales. Elles permettent de décrire la **rotation d'un repère** ou d'un **vecteur** autour d'un axe fixe de l'espace.

### Définition

Une matrice  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est une matrice de rotation si elle vérifie :

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = I \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{R}) = 1$$

L'ensemble des matrices de rotation forme le groupe spécial orthogonal :

$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = I, \det(\mathbf{R}) = 1 \}$$

Ces matrices permettent de représenter les orientations d'un solide indéformable ou le passage d'un repère local à un repère global.

### Action d'une rotation sur un vecteur

Soit un vecteur  $\vec{v}$  exprimé dans le repère  $\mathcal{R}_1$ . Si  $\mathcal{R}_2$  est obtenu par rotation de  $\mathcal{R}_1$  via la matrice  $\mathbf{R}_{2/1}$ , alors :

$$[\vec{v}]_1 = \mathbf{R}_{2/1} \cdot [\vec{v}]_2 \quad \text{et réciproquement} \quad [\vec{v}]_2 = \mathbf{R}_{2/1}^T \cdot [\vec{v}]_1$$

### Rotations élémentaires

Les rotations autour des axes de base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sont données par les matrices suivantes :

**Rotation autour de l'axe  $\vec{x}$  d'un angle  $\theta$  :**

$$\mathbf{R}_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe  $\vec{y}$  d'un angle  $\theta$  :

$$\mathbf{R}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe  $\vec{z}$  d'un angle  $\theta$  :

$$\mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaque matrice est orthogonale, et :

$$\mathbf{R}_X(\theta)^T = \mathbf{R}_X(-\theta) \quad ; \quad \mathbf{R}_Y(\theta)^T = \mathbf{R}_Y(-\theta) \quad ; \quad \mathbf{R}_Z(\theta)^T = \mathbf{R}_Z(-\theta)$$

## Composition de rotations

Deux rotations successives se composent par un **produit matriciel** :

$$\mathbf{R}_{\text{total}} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$$

La composition n'est **pas commutative** :

$$\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$$

ce qui reflète la nature géométrique de la rotation dans l'espace.

## D.9 Changement de base dans $\mathbb{R}^3$

Ce type de transformation est fondamental en mécanique pour exprimer :

- un **vecteur** (position, vitesse, accélération) dans un autre repère,
- ou un **tenseur** (inertie, contraintes) dans un repère différent.

### Changement de base d'un vecteur

Soient deux bases orthonormées directes de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

On note par  $\mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}$  la **matrice de passage** de la base  $\mathcal{B}_2$  vers la base  $\mathcal{B}_1$ , définie par :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{x}}_1 &= a_{11}\vec{\mathbf{x}}_1 + a_{21}\vec{\mathbf{y}}_1 + a_{31}\vec{\mathbf{z}}_1, \\ \vec{\mathbf{y}}_2 &= a_{12}\vec{\mathbf{x}}_1 + a_{22}\vec{\mathbf{y}}_1 + a_{32}\vec{\mathbf{z}}_1, \\ \vec{\mathbf{z}}_2 &= a_{13}\vec{\mathbf{x}}_1 + a_{23}\vec{\mathbf{y}}_1 + a_{33}\vec{\mathbf{z}}_1.\end{aligned}$$

On constate que la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_2$  vers la base  $\mathcal{B}_1$  est identique à matrice de rotation de 2 par rapport à 1

$$\mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = \mathbf{R}_{2/1}$$

Par conséquent, cette matrice est orthogonale :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}^\top \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = \mathbf{I}$$

**Relation entre les coordonnées :** Si un vecteur  $\vec{\mathbf{v}}$  a pour coordonnées :

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{cases} \begin{cases} [v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} & \text{dans la base } \mathcal{B}_1, \\ [v]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2} & \text{dans la base } \mathcal{B}_2. \end{cases} \end{cases}$$

Alors :

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} \cdot [v]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{2/1} \cdot [v]_{\mathcal{B}_2} \quad \text{et réciproquement} \quad [v]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}^\top \cdot [v]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{R}_{2/1}^\top \cdot [v]_{\mathcal{B}_1}$$

## Changement de base d'une matrice

Soit une matrice  $\mathbf{A}$  représentant une application linéaire (par exemple une transformation ou un tenseur) dans la base  $\mathcal{B}_1$  :

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_1}$$

et soit  $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_2}$  sa représentation dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

Le lien entre ces deux représentations est donné par la formule :

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_1} \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}$$

ou encore, comme  $\mathbf{R}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}^\top$  :

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}^\top [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}_1} \mathbf{R}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}$$